UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Métricas com $Q-$Curvatura Constante Via um Fluxo Não Local e um Princípio do Máximo para o Operador de Paneitz

por

Makson Sales Santos
Mestrado Acadêmico em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristovão-SE
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Métricas com $Q-$Curvatura Constante Via um Fluxo Não Local e um Princípio do Máximo para o Operador de Paneitz

Makson Sales Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristovão-SE
2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237m

Santos, Makson Sales

Métricas com Q – curvatura constante via um fluxo não local e um princípio do máximo para o operador de Paneitz / Makson Sales Santos ; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristovão, 2015.

108 f.

Dissertação (mestrado em matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Curvatura. I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Métricas com Q-Curvatura Constante Via um Fluxo Não Local e um Princípio do Máximo para o Operador de Paneitz

por

Makson Sales Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos- UFS
Orientador

José Anderson V. Cardoso

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Primeiro Examinador

Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante – UFAL
Segundo Examinador

São Cristóvão, 10 de agosto de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Sumário

Agradecimentos

Bom, primeiramente quero agradecer a Deus, pois, não importando a situação sempre está comigo, me dando forças, e me dizendo que posso continuar. Agradeço também ao meu orientador, prof. Dr. Almir Rogério, que aguentou todo o meu enjôo, e sempre estava disposto a tirar minhas dúvidas. Também a minha esposa, Cléa, que foi mais uma que me aguentou nesse percurso, me inspirando, me apoiando e mostrando que sou capaz. Amo-te muito. A minha família, que hoje e sempre poderei contar, um lugar que sempre serei bem vindo. E por último, mas não menos importantes, meus amigos, que trilharam junto comigo esse caminho, e me ajudaram direta ou indiretamente, como Regivan, Robson, Cléa, entre tantos outros. A todos vocês eu agradeço, sei que sem vocês não estaria onde estou hoje. Agradeço também a CAPES, pelo auxílio duranto o curso.

Makson Sales Santos
Agosto de 2015

Resumo

O objetivo desta dissertação é expor com detalhes o resultado de Gursky-Malchiodi [7]. Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g_0) de dimensão $n \geq 5$ com curvatura escalar não negativa e $Q-$curvatura semipositiva, existe uma métrica conforme a g_0 com $Q-$curvatura constante positiva. Com estas hipóteses mostra-se um princípio do máximo forte para o operador de Paneitz, que é um operador diferencial parcial não linear de quarta ordem. A partir daí define-se um fluxo não local e, utilizando funções testes, modificamos conformemente a métrica inicial tal que o fluxo converge sequencialmente para uma métrica conforme de $Q-$curvatura constante positiva e curvatura escalar positiva.

Palavras Chaves: $Q-$curvatura, Operador de Paneitz, Geometria Conforme, Fluxo não local.

Abstract

Key Words: $Q-$curvature, Paneitz Operator, Conformal Geometry, Non-Local Flow.

Introdução

Em 1960 Yamabe iniciou o estudo do que hoje é conhecido como O Problema de Yamabe, que pergunta se em uma classe conforme de uma variedade Riemanniana (M^n, g_0) de dimensão $n \geq 3$, existe alguma métrica com curvatura escalar constante. Este problema, que é equivalente a existência de uma solução positiva de uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem, foi completamente resolvido em 1984 após os trabalhos de Schoen, Trundinger e Aubin (veja [9] para uma excelente exposição). A partir daí a geometria conforme passou a ser foco de pesquisa de muitos matemáticos.

Em 1983 Stephan Paneitz [10] introduziu um operador diferencial linear de quarta ordem agindo sobre funções suaves definidas em variedades pseudo-Riemannianas. Mais tarde, em 1985 Thomas Branson [2] reconheceu que este operador descreve a transformação conforme do que hoje é conhecido como a $Q-$curvatura e desta forma sugere um problema análogo ao de Yamabe.

Dada (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, a $Q-$curvatura é definida como

$$Q_g = -\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|_g^2,$$

onde R_g e Ric_g são a curvatura escalar e o tensor de Ricci da métrica g, respectivamente, e o operador de Paneitz é definido como

$$P_g u = \Delta_g^2 u + div_g \left\{ \left(\frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)} R_g g - \frac{4}{n-2} Ric_g \right) (\nabla_g u, .) \right\} + \frac{n-4}{2} Q_g u.$$

O que Brason verificou é que se $n \neq 4$ então

$$Q_{u^{\frac{4}{n-4}} g} = \frac{2}{n-4} u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g u,$$

enquanto que para $n = 4$ tem-se

$$Q_{u^{\frac{4}{n-4}} g} = e^{2w} \left(P_g w + Q_g \right).$$

Neste trabalho estamos interessados no caso em que $n \geq 5$.

O problema da $Q-$curvatura consiste em encontrar uma métrica com $Q-$curvatura constante na classe conforme de uma métrica dada. Este problema é variacional no sentido que pontos críticos do funcional

$$\mathcal{Q}(g) = Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}} \int_M Q_g dv_g$$

restrito a uma classe conforme são métricas de $Q-$curvatura constante, onde

$$Vol(M, u^{\frac{4}{n-4}} g) = \int_M u^{\frac{2n}{n-4}} dv_g.$$

Aqui aparecem três dificuldades principais, a primeira é que em geral $\mathcal{Q}(g)$ não é limitado inferior nem superiormente quando restrito a uma classe conforme, o que implica que não é fácil encontrar uma sequência de funções (u_i) tais que a sequência $(\mathcal{Q}(u_i^{\frac{4}{n-4}} g))$ convirja para um valor crítico. Além disso, caso encontre esta sequência aparece uma segunda dificuldade, a falta de compacidade do mergulho do espaço de Sobolev $W^{2,2}(M) \subset L^{\frac{2n}{n-4}}(M)$, que é apenas uma inclusão contínua. Como o funcional é invariante por escalar, podemos tomar uma sequência de funções (u_i) tais que $Vol(M, u_i^{\frac{4}{n-4}} g) = 1$, porém pela falta de compacidade do mergulho de Sobolev poderíamos ter que $\|u_i\|_{L^2(M)} \to 0$, e não teríamos conclusão alguma. Finalmente, uma terceira dificuldade é que mesmo que encontremos um ponto crítico para o funcional

$$\mathcal{F}_g(u) = \frac{\displaystyle\int_M u P_g u dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}} dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}}}, \tag{1}$$

não existe em geral um princípio do máximo para operadores diferenciais de quarta ordem que garanta que o ponto crítico seja positivo. Note que se u é positivo então $\mathcal{F}_g(u) = \dfrac{2}{n-4} \mathcal{Q}(u^{\frac{4}{n-4}} g)$.

Muitos resultados são conhecidos a respeito da existência de solução para o problema da $Q-$curvatura constante. Porém, o objetivo principal deste trabalho é expor com detalhes o resultado do artigo de Gursky-Malchiodi, *A strong maximum principle for the Paneitz operator and a non-local flow for the $Q-$curvature*, [7], que prova o seguinte resultado

Teorema Principal: *Seja (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$ com curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura semipositiva, ou seja, $Q_{g_0} \geq 0$ e $Q_{g_0} > 0$ em algum ponto. Então existe uma métrica conforme $h = u^{\frac{4}{n-4}} g_0$ com curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura constante positiva.*

Inicialmente, sob as hipóteses do teorema é provado um princípio do máximo para o operador de Paneitz e que ele é positivo. A partir daí é possível definir um fluxo não local como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & -u + \mu P_{g_0}^{-1}(|u|^{\frac{n+4}{n-4}}), \\ u(\cdot, 0) & = & 1, \end{cases}$$

onde

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_M u P_{g_0} u dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}}.$$

Em seguida, usando o princípio do máximo e algumas estimativas integrais obtemos a existência de uma solução para o fluxo definida para todo $t \geq 0$. O passo seguinte é mostrar que é possível extrair uma sequência de tempos $(t_j)_j$ tais que a sequência $u_j = u(\cdot, t_j)$ converge para uma solução do problema. Para este fim mostra-se que é possível escolher uma métrica inicial h na classe conforme de g_0, com curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura semipositiva, para a qual a solução do fluxo satisfaz

$$\int_M u^2 dv_h \geq c > 0,$$

para todo tempo, onde c não depende de t. Para o caso de dimensão $n \geq 8$ e não localmente conformemente plana, isso é feito construindo uma função teste cujo quociente de Paneitz Sobolev (1) é estritamente menor que a constante de Paneitz Sobolev da esfera canônica. Para o caso em que a dimensão é $n = 5, 6$ ou 7 ou o caso localmente conformemente plana mostra-se que a função de Green para o operador de Paneitz é positiva, encontra-se uma expansão local para ela e prova-se um teorema da massa positiva. A partir daí constrói-se uma função teste tal que o quociente de Paneitz Sobolev (1) é estritamente menor que a constante de Paneitz Sobolev da esfera canônica. Finalmente o resultado é obtido usando Teoria de Regularidade Elíptica e os teoremas de compacidade dos espaços de Sobolev.

A dissertação está organizada em cinco capítulos.

No capítulo 1 apresentamos as definições iniciais e resultados preliminares que serão utilizados ao longo do texto. Inicialmente definimos métricas Riemannianas e o tensor curvatura bem como objetos geométricos e diferenciais: curvatura escalar, tensor de Ricci, gradiente, hessiana, divergente e o laplaciano. Em seguida definimos a $Q-$curvatura e o operador de Paneitz e encontramos algumas expansões em coordenadas normais conformes. Falamos brevemente sobre as funções de Green do laplaciano conforme e do operador de Paneitz. Finalmente definimos os espaços de Sobolev, enunciamos os teoremas de compacidade, definimos operadores diferenciais elípticos e enunciamos o teorema de regularidade elíptica para operadores lineares elípticos de ordem par.

No capítulo 2 sob as hipóteses do Teorema Principal mostramos um princípio do máximo para o operador de Paneitz e que o mesmo é positivo. Usando estes fatos mostramos que a função de Green do operador de Paneitz é positiva, encontramos uma expansão local para a função de Green em coordenadas normais conformes quando a dimensão é 5, 6 ou 7, ou a métrica é localmente conformemente plana. O último resultado do capítulo é um teorema da massa positiva para o operador de Paneitz.

No capítulo 3 definimos o fluxo, mostramos a existência de solução definida para todo tempo e algumas propriedades que serão fundamentais para a demonstração do resultado final.

O capítulo 4 é reservado para a construção da função teste, a qual é dividida em dois casos. O caso em que a dimensão é maior ou igual que 8 e a métrica é não localmente conformemente plana, e o caso em que a dimensão é 5, 6 ou 7 ou a métrica é localmente conformemente plana. No segundo caso, o Teorema da Massa Positiva será crucial para a construção da função teste.

Finalmente no capítulo 5 mostramos o Teorema Principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições básicas da geometria Riemanniana, bem como ferramentas de geometria e da análise que serão utilizadas ao longo do trabalho. Em todo trabalho usaremos a notação de Einstein que diz que índices repetidos abaixo e acima representam somas variando de 1 até a dimensão da variedade, como por exemplo,

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i.$$

Frequentemente utilizaremos as letras c e C, com ou sem índices, para representas diferentes constantes mesmo que em uma mesma linha.

O material deste capítulo pode ser encontrado em [1], [3] e [11].

1.1 Métricas Riemannianas e o tensor curvatura

Aqui denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M e $C^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções suaves definidas em uma variedade diferenciável suave M.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é um tensor suave g do tipo (2,0) em M tal que em cada ponto $p \in M$, a aplicação $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g_p(u, v) := g(U, V)(p),$$

onde $U, V \in \mathcal{X}(M)$ são tais que $U(p) = u$ e $V(p) = v$ é um produto interno em T_pM.

Teorema 1.2. *Toda variedade diferenciável Hausdorff com base enumerável admite uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.3. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

que será denotada por $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$, que satisfaz as seguintes propriedades *(i)* $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$*;*

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*;*

(iii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$*;*

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$*.*

Teorema 1.4 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanna* (M, g) *existe uma única conexão afim* ∇ *satisfazendo as condições:*

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$ *(compatível com a métrica).*

Em um sistema de coordenadas definimos os símbolos de Christoffel como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right),$$

(g_{ij}) são as componentes da métrica neste sistema de coordenadas e (g^{ij}) é sua inversa.

Dada uma variedade Riemanniana (M, g), o tensor curvatura do tipo $(3, 1)$ é definido como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Usando a métrica, obtemos um tensor do tipo $(4, 0)$ definido como

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Suas componentes em um sistema de coordenadas são

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

e

$$R_{ijkl} := R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = R_{ijk}^m g_{ml}.$$

Em coordenadas temos que

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Proposição 1.5. *Tem-se as seguintes propriedades para o tensor curvatura*

(i) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z) = R(W, Z, Y, X)$

(ii) $R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)+R(X,W,Y,Z)=0$ *(1^a identidade de Bianchi) para todo* $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

O tensor de Ricci é definido como

$$Ric(X,Y) = tr\,(Z \to R(Z,X)Y)$$

e a curvatura escalar é definida como

$$R_g := tr(Ric_g) = g^{ij}R_{ij},$$

onde $R_{ij} = g^{kl}R_{kijl}$ são as componentes do tensor de Ricci.

O tensor curvatura pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R &= W_g - \frac{R_g}{2(n-1)(n-2)} g \odot g + \frac{1}{n-2} Ric_g \odot g \\ &= W_g + A_g \odot g, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde W_g é o tensor de Weyl,

$$A_g = \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)} g\right) \tag{1.2}$$

é o tensor de Schouten e para todo tensor simétrico A e B do tipo (2,0), $\odot$ é o produto de Kulkarni-Nomizu que é definido como

$$\begin{aligned} A \odot B(X,Y,Z,W) &= A(X,W)B(Y,Z) + A(Y,Z)B(X,W) \\ &\quad - A(X,Z)B(Y,W) - A(Y,W)B(X,Z). \end{aligned}$$

O tensor de Weyl tem as mesmas simetrias algébricas do tensor curvatura, Proposição 1.5, todos os seus traços são zero, incluindo $g^{ik}W_{ijkl} = 0$, e é identicamente nulo para $n = 3$. Além disso, o tensor de Weyl é conformemente invariante, isto é

$$W_{e^f g} = e^f W_g$$

para qualquer função suave f sobre M. Veja [3] para mais detalhes.

Uma variedade Riemanniana (M,g) é dita localmente conformemente plana se para todo ponto $p \in M$, existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de p tal que

$$g_{ij} = f\delta_{ij},$$

para alguma função positiva f definida em U, onde δ é a métrica Euclidiana. Pelo Teorema de Uniformização de Riemann, toda variedade Riemanniana de dimensão 2 é localmente conformemente plana.

Proposição 1.6. *Uma variedade Riemanniana* (M^n,g) *é localmente conformemente plana com dimensão* $n \geq 4$ *se e somente se o tensor de Weyl é identicamente nulo.*

1.2 Operadores Diferenciáveis

Definição 1.7. *Seja* T *um tensor de tipo* $(r,0)$*. A derivada covariante* $\nabla\mathrm{T}$ *de* T *é um tensor de ordem* $(r+1,0)$ *definido como*

$$\nabla\mathrm{T}(X_1,\ldots,X_r,X) := (\nabla_X\mathrm{T})(X_1,\ldots,X_r) := X(\mathrm{T}(X_1,\ldots,X_r)) - \sum_{k=1}^{r}\mathrm{T}(X_1,\ldots,\nabla_X X_k,\ldots,X_r),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana.*

Se g é uma métrica em uma variedade diferenciável com conexão Riemanniana ∇, então

$$\nabla g(X,Y,Z) = Z\langle X,Y\rangle - \langle\nabla_Z,Y\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle.$$

Daí, $\nabla g \equiv 0$.

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana.

Definimos o **gradiente** de uma função $f \in C^\infty(M)$, como o único campo de vetores $\nabla_g f$ em $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ tal que

$$\nabla f(X) = g(\nabla_g f, X).$$

Em coordenadas, temos que

$$\nabla_g f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz (g_{ij}). Aqui estamos utilizando a notação de Einstein.

Definimos a **Hessiana** de $f \in C^\infty(M)$ como o tensor do tipo $(2,0)$, denotado por $\nabla^2 f$ ou $Hessf$, como

$$\nabla^2 f(X,Y) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f).$$

Utilizando o fato que a conexão é simétrica, Teorema 1.4, mostra-se que a Hessiana é um tensor simétrico.

Definimos o **divergente** de um tensor A do tipo $(r,0)$ como o único tensor do tipo $(r-1,0)$ dado por

$$div_g(A)_{i_1\ldots i_{r-1}} := g^{jk}\nabla_j A_{ki_1\ldots i_{r-1}}.$$

O **laplaciano** de uma função $f \in C^\infty(M)$ é definido como

$$\Delta_g f = div_g(\nabla_g f) = tr_g \nabla_g^2 f.$$

Em coordenadas temos

$$\Delta_g f = \sum_i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \Gamma_{ii}^k\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right). \tag{1.3}$$

Proposição 1.8. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Então*

(i) $\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$ *(2^a identidade de Bianchi)*

(ii) $2div_g Ric_g = \nabla R_g$ *(2^a identidade de Bianchi contraída).*

Teorema 1.9 (Fórmula de Böchner-Weitzenböck)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Seja $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta_g(|\nabla_g f|^2) = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla_g f, \nabla_g(\Delta_g f)\rangle + Ric(\nabla_g f, \nabla_g f). \tag{1.4}$$

Demonstração. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal, então

$$|\nabla_g f|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i f)^2.$$

Daí,

$$\nabla_i |\nabla_g f|^2 = 2\sum_i \nabla_i f \nabla_j \nabla_i f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_g(|\nabla_g f|^2) &= \frac{1}{2}\sum_j \nabla_j\nabla_j |\nabla_g f|^2 = \sum_j \nabla_j(\nabla_i f \nabla_j \nabla_i f) \\
&= \sum_{i,j} (\nabla_j \nabla_i f)^2 + \sum_{i,j} \nabla_i f \nabla_j \nabla_j \nabla_i f.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Porém

$$\sum_{i,j} (\nabla_j \nabla_i f)^2 = |\nabla^2 f|^2. \tag{1.6}$$

Pela identidade de Ricci,

$$\nabla_j \nabla_i \nabla_j f = \nabla_i \nabla_j \nabla_j f - \sum_s R_{jijs} \nabla_s f,$$

e utilizando o fato que a Hessiana é simétrica obtemos

$$\sum_{i,j} \nabla_i f \nabla_j \nabla_j \nabla_i f = \sum_{i,j} \nabla_i f \nabla_j \nabla_i \nabla_j f$$

$$= \sum_{i,j} \nabla_i f \nabla_i \nabla_j \nabla_j f - \sum_{i,j,s} \nabla_i f \nabla_s f R_{jijs} = \sum_{i,j} \nabla_i f \nabla_i \nabla_j \nabla_j f + \sum_{i,s} \nabla_i f \nabla_s f R_{si}$$

$$= \langle \nabla_g f, \nabla_g(\Delta_g f)\rangle + Ric(\nabla_g f, \nabla_g f).$$

Desta última igualdade, de (1.5) e (1.6), obtemos o resultado. $\square$

Corolário 1.10 (Fórmula Integral de Böchner)**.** *Sejam (M, g) uma variedade compacta sem fronteira e f uma função suave em M. Então*

$$\int_M (\Delta_g f)^2 dv_g = \int_M |\nabla^2 f|^2 dv_g + \int_M Ric(\nabla_g f, \nabla_g f) dv_g.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Divergência obtemos que

$$\int_M \Delta_g(|\nabla_g f|^2) dv_g = 0$$

e

$$\int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g(\Delta_g f)\rangle dv_g = -\int_M (\Delta_g f)^2 dv_g.$$

Logo, integrando a Fórmula de Böchner-Weitzenböck obtemos o resultado. □

1.3 A Q-curvatura e o Operador de Paneitz

Definição 1.11. *A Q-curvatura de Branson é definida por*

$$\begin{aligned} Q_g &= -\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2 \\ &= -\Delta_g \sigma_1(A_g) + 4\sigma_2(A_2) + \frac{n-4}{2}\sigma_1(A_g)^2, \end{aligned}$$

onde, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, a σ_k-curvatura é definida como

$$\sigma_k(A_g) := \sum_{1<i_1\leq \ldots \leq i_k<n} \lambda_{i_1}.\ldots.\lambda_{i_k},$$

ou seja, $\sigma_k(A_g)$ é a $k-$ésima função simétrica dos autovalores de A_g. Note que

$$\sigma_1(A_g) = tr_g(A_g) \ \text{ e } \ \sigma_2(A_g) = \frac{1}{2}\left((tr_g A_g)^2 - |A_g|^2\right) \tag{1.7}$$

implicam que

$$\sigma_1(A_g) = \frac{R_g}{2(n-1)} \ \text{ e } \ \sigma_2(A_g) = \frac{n}{8(n-1)(n-2)^2}R_g^2 - \frac{|Ric_g|^2}{2(n-2)^2}. \tag{1.8}$$

Definição 1.12. *O operador de Paneitz é*

$$\begin{aligned} P_g u &= \Delta_g^2 u + div_g\left\{\left(4A_g - \frac{n-2}{2(n-1)}R_g g\right)(\nabla_g u, .)\right\} + \frac{n-4}{2}Q_g u \\ &= \Delta_g^2 u + div_g\left\{(4A_g - (n-2)\sigma_1(A_g)g)(\nabla_g u, .)\right\} + \frac{n-4}{2}Q_g u \\ &= \Delta_g^2 u + div_g\left\{\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}Ric_g\right)(\nabla_g u, .)\right\} + \frac{n-4}{2}Q_g u. \end{aligned}$$

Note que

$$div_g\{(4Ag - (n-2)\sigma_1(Ag)g)(\nabla u, \cdot)\} =$$

$$= 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle - (n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u + (6-n)\langle \nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle.$$

De fato, tome

$$T(v) = (4A_g - (n-2)\sigma_1(A_g)g)(\nabla u, v)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T_j = T(\tfrac{\partial}{\partial x_j}) &= (4A_g - (n-2)\sigma_1(A_g)(g))(\nabla u, \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= (4A_g - (n-2)\sigma_1(A_g)g)(g^{il}\nabla_i u \tfrac{\partial}{\partial x_l}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= 4g^{il}\nabla_i u A_{lj} - (n-2)\sigma_1(A_g)\nabla_j u.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a segunda identidade de Bianchi contraída $2g^{ij}\nabla_i R_{jk} = \nabla_k R_g$, obtemos

$$\begin{aligned}
div(T) = g^{kj}\nabla_k T_j &= 4g^{il}g^{kj}A_{lj}\nabla_k\nabla_i u + 4g^{kj}g^{il}\nabla_i u\nabla_k A_{lj} \\
&\quad -(n-2)g^{kj}\nabla_k\sigma_1(A_g)\nabla_j u - (n-2)g^{kj}\sigma_1(A_g)\nabla_k\nabla_j u \\
&= 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle + \frac{4}{n-2}g^{il}\nabla_i u \left[g^{kj}\nabla_k R_{lj}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2(n-1)}g^{kj}\nabla_k R_g g_{lj}\right] - (n-2)\langle\nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle \\
&\quad -(n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u \\
&= 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle + \frac{4}{n-2}g^{il}\nabla_i u\left[\frac{1}{2}\nabla_l R_g - \frac{1}{2(n-1)}\nabla_l R_g\right] \\
&\quad -(n-2)\langle\nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle - (n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u \\
&= 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle + 4g^{il}\nabla_i u\nabla_l\sigma_1(A_g) - (n-2)\langle\nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle \\
&\quad -(n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u \\
&= 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle + (6-n)\langle\nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle - (n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
P_g u &= \Delta_g^2 u + 4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle + (6-n)\langle\nabla\sigma_1(A_g), \nabla u\rangle \\
&\quad -(n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u + \frac{n-4}{2}Q_g u.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

1.4 Geometria Conforme

Definição 1.13. *Duas métricas g e g_0 em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função positiva suave f tal que $g = fg_0$. O conjunto de todas as métricas conformes a uma métrica g_0 é denotado por $[g_0]$.*

Note que se $g \in [g_0]$, então podemos escrever $g = e^u g_0$, onde u é uma função suave.

Proposição 1.14. *Se $g = e^{2f} g_0$, então*

(i) $Ric_g = Ric_{g_0} - (n-2)\nabla^2_{g_0} f - (\Delta_{g_0} f + (n-2)|\nabla_{g_0} f|^2_{g_0}) g_0 + (n-2) df \otimes df$

(ii) $R_g = e^{-2f}(R_{g_0} - 2(n-1)\Delta_{g_0} f - (n-1)(n-2)|\nabla_{g_0} f|^2_{g_0})$

Além disso, se $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g_0$, então

(iii) $R_{\hat{g}} = \dfrac{4(n-1)}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{g_0}(u)$,

onde

$$L_{g_0} = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} R_{g_0}.$$

Para uma prova ver [5].

Se $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g_0$, então

$$Q_{\hat{g}} = \frac{2}{n-4} u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0} u. \tag{1.10}$$

A demonstração é um longo cálculo o qual omitiremos aqui.

De (1.10) obtemos

$$\frac{2}{n-4}(uv)^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0}(uv) = Q_{(uv)^{\frac{4}{n-4}} g_0} = Q_{v^{\frac{4}{n-4}} \hat{g}} = \frac{2}{n-4} v^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{\hat{g}} v.$$

Logo,

$$P_{\hat{g}}(v) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0}(uv). \tag{1.11}$$

Analogamente, mostramos que

$$L_{u^{\frac{4}{n-2}} g_0}(v) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{g_0}(uv).$$

Teorema 1.15 (Coordenadas normais conformes)**.** *Sejam (M, g_0) uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Para cada número inteiro $N \geq 2$ existe uma métrica g conforme a g_0 sobre M tal que*

$$\det g_{ij} = 1 + O(|x|^N),$$

em coordenadas normais em p na métrica g. Nessas coordenadas, se $N \geq 5$, a curvatura escalar de g satisfaz $R_g = O(|x|^2)$ e $\Delta_g R_g = -\dfrac{1}{6}|W_g|^2_g$ em p, onde W_g é o tensor de Weyl.

Como colorário da demonstração do Teorema 1.15 em [9] temos que

Corolário 1.16. *Se g é a métrica dada pelo Teorema 1.15, temos*

(i) $R_{ij}(0) = 0$;

(ii) $R_g(0) = 0$;

(iii) $\nabla_g R_g(0) = 0$;

(iv) $(\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki})(0) = 0$;

(v) $(\nabla_k \nabla_l R_{ij} + \nabla_l \nabla_i R_{jk} + \nabla_i \nabla_j R_{kl} + \nabla_j \nabla_k R_{li})(0) = 0$.

Corolário 1.17. *Em coordenadas normais conformes, tem-se as seguintes expansões para o tensor de Schouten (1.2) e para a $Q-$curvatura, Definição 1.11:*

(i) $A_{ij}(0) = 0$;

(ii) $(\nabla_k A_{ij} + \nabla_i A_{jk} + \nabla_j A_{ik})(0) = 0$;

(iii) $\nabla_k \nabla_l A_{ij}(0) x^k x^l x^i x^j = -\dfrac{r^2}{(n-2)} \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l$;

(iv) $Q_g = \dfrac{1}{12(n-1)} |W_g|^2(0) + O(r)$.

Demonstração. Temos que (i) e (ii) segue diretamente da definição do tensor de Schouten e do Corolário 1.16. Para ver (iv), basta expandir Q_g em série de Taylor e usar o Teorema 1.15 e o Corolário 1.16,

$$
\begin{aligned}
Q_g &= Q_g(0) + O(r) = -\frac{1}{2(n-1)} \Delta_g R_g(0) \\
&\quad + c_1(n) R_g^2(0) - c_2(n) |Ric_g(0)|^2 + O(r) \\
&= -\frac{1}{2(n-1)} \left[-\frac{1}{6} |W_g|^2(0) + O(r) \right],
\end{aligned}
$$

onde $c_1(n)$ e $c_2(n)$ são constantes que dependem somente da dimensão de M. E para (iii), note que

$$
g_{ij} x^i x^j = \langle e_i, e_j \rangle \cdot x^i x^j = \langle x^i e_i, x^j e_j \rangle = \langle x, x \rangle = r^2. \tag{1.12}
$$

Logo de (1.8) temos

$$
-\frac{1}{2(n-1)} \nabla_k \nabla_l R_{\tilde{g}} g_{ij} x^k x^l x^i x^j = -\frac{r^2}{n-2} \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l
$$

e do item (v) do Corolário 1.16 temos

$$\frac{1}{n-2}\nabla_k\nabla_l R_{ij}(0)x^k x^l x^i x^j =$$

$$= \frac{1}{4(n-2)}(\nabla_k\nabla_l R_{ij} + \nabla_l\nabla_i R_{jk} + \nabla_i\nabla_j R_{kl} + \nabla_j\nabla_k R_{li})(0)\cdot x^k x^l x^i x^j = 0.$$

Portanto,

$$\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l x^i x^j = -\frac{r^2}{n-2}\nabla_k\nabla_l\sigma_1(0)x^k x^l.$$

□

Lema 1.18. *Seja g a métrica dada pelo Teorema 1.15, para algum $N \geq 2$. Em coordenadas normais, se u é uma função radial com respeito a um ponto $p \in M$ então tem-se as seguintes expansões:*

$$\nabla_i\nabla_j u = \frac{x_i x_j}{r^2}u'' - \frac{x_i x_j}{r^3}u' + \frac{\delta_{ij}}{r}u' + O(r)|u'|; \tag{1.13}$$

$$\Delta_g u = u'' + \frac{n-1}{r}u' + O''(r^{N-1})u'; \tag{1.14}$$

$$\Delta_g^2 u = \Delta_0^2 u + O(r^{N-1})u''' + O(r^{N-2})u'' + O(r^{N-3})u', \tag{1.15}$$

onde $N \geq 5$, Δ_0 denota o laplaciano Euclidiano e $r(q) = d_g(p,q)$.

Demonstração. Seja (r,θ) coordenadas polares com polo $p \in M$. Temos que as coordenadas polares são dadas por $\varphi(r,\theta) = exp_p(r\theta)$, onde $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, a matriz da métrica nessas coordenadas é da forma

$$(\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g_{ij}) \end{pmatrix}.$$

Se $\tilde{g}_{ij}$ são as componentes de g em coordenadas polares e g_{ij} as componentes de g em coordenadas normais, então

$$\sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = r^{n-1}\sqrt{\det g_{ij}}.$$

Daí

$$\log\sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = \log\sqrt{\det g_{ij}} + (n-1)\log r$$

o que implica

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\det g_{ij}} + \frac{n-1}{r}.$$

Pela fórmula do Laplaciano em coordenadas (1.3), começando em coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_g u &= \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\tilde{g}^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\tilde{g}^{ij}\frac{\partial u}{\partial \theta_j}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\
&= u'' + \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}u' \\
&= u'' + \frac{n-1}{r}u' + u'\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\det(g_{ij})},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

onde na terceira igualdade utilizamos o fato que u não depende de θ. Pelo Teorema 1.15

$$\det\tilde{g} = 1 + O^{(3)}(r^N),$$

Daí, como

$$\partial_r \log\sqrt{\det\tilde{g}} = \frac{1}{2}\partial_r\log\det\tilde{g} = \frac{1}{2}\frac{\partial_r\det\tilde{g}}{\det\tilde{g}},$$

temos que

$$\partial_r \log\sqrt{\det\tilde{g}} = O''(r^{N-1}).$$

Substituindo isso em (1.16), chegamos a (1.14). Para (1.15), primeiro note que

$$\begin{aligned}
\Delta_0^2 u &= \Delta_0(u'') + (n-1)\Delta_0(u'/r) \\
&= u^{(iv)} + \frac{n-1}{r}u''' + (n-1)\left(\left(\frac{u}{r}\right)'' + \frac{n-1}{r}\left(\frac{u}{r}\right)'\right) \\
&= u^{(iv)} + \frac{n-1}{r}u''' \\
&\quad + (n-1)\left(\frac{r^2u''' + 2u'' - 2ru''}{r^3} + \frac{n-1}{r}\frac{ru'' - u''}{r^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Por (1.14)

$$\Delta_g^2 u = \Delta_g u'' + (n-1)\Delta_g\left(\frac{u'}{r}\right) + \Delta_g(O(r^{N-1})u'),$$

logo

$$
\begin{aligned}
\Delta_g^2 u &= u^{(iv)} + \frac{n-1}{r}u''' + O(r^{N-1})u'' + (n-1)\Bigg(\frac{r^2u''' + 2u' - 2ru''}{r^3} + \\
&\quad + \frac{n-1}{r}\frac{ru''-u''}{r^2} + O(r^{N-1})\frac{ru''-u'}{r^2}\Bigg) + O(r^{N-3})u' + O(r^{N-2})u'' + \\
&\quad + O(r^{N-1})u''' + \frac{n-1}{r}\left(O(r^{N-2})u' + O(r^{N-1})u''\right) \\
&= \Delta_0^2 + O(r^{N-1})u''' + O(r^{N-2})u'' + O(r^{N-3})u'.
\end{aligned}
$$

Em coordenadas normais, $g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2)$ e $g^{ij} = \delta_{ij} + O(r^2)$. Assim

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right) = O(r).$$

Daí,

$$\partial_l \Gamma_{ij}^k = O(1).$$

Como u é radial temos que

$$\partial_i u = u'\frac{x_i}{r}$$

e

$$
\begin{aligned}
\partial_j\partial_i u &= \partial_j\left(u'\frac{x_i}{r}\right) \\
&= u''\frac{x_ix_j}{r_2} + u'\frac{-\frac{x_j}{r}x_i + r\delta_{ij}}{r^2} \\
&= u''\frac{x_ix_j}{r^2} - u'\frac{x_ix_j}{r^3} + u'\frac{\delta_{ij}}{r}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\nabla_i\nabla_j u &= \partial_i\partial_j u + \Gamma_{ij}^k u_k \\
&= \partial_i\partial_j u + O(r)|u'| \\
&= u''\frac{x^ix^j}{r^2} - u'\frac{x^ix^j}{r^3} + u'\frac{\delta^{ij}}{r} + O(r)|u'|.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar. □

Corolário 1.19. *O Laplaciano Euclidiano em coordenas polares (r,θ) é dado por*

$$\Delta_0 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta f.$$

Lema 1.20. *Se u é radial, então em coordenadas normais conformes tem-se*

$$
\begin{aligned}
P_g u &= \Delta_0^2 u + \nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^kx^l\mathfrak{Q}(u) + \frac{n-4}{24(n-1)}|W|^2(0)u + O(r^3)|u''| \\
&+ O(r^2)|u'| + O(r)u + O(r^{N-1})u''' + O(r^{N-2})u'' + O(r^{N-3})u',
\end{aligned}
$$

onde

$$\mathfrak{Q}(u) = \frac{u'}{r}\left(\frac{2(n-1)}{(n-2)} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 - n\right) - u''\left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{2}{n-2}\right)$$

e N pode ser tomado tão grande quanto se queira.

Demonstração. Aqui vamos utilizar a expressão (1.9).

Expandindo em série de Taylor e usando o Teorema 1.15 e o Corolário 1.17, obtemos que em um referencial ortonormal, temos

$$\begin{aligned} \langle A_g, \nabla^2 u\rangle &= \left(A_{ij}(0) + \nabla_k A_{ij}(0)x^k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l + O(r^3)\right)\nabla_i\nabla_j u \\ &= \left(\nabla_k A_{ij}(0)x^k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l + O(r^3)\right) \\ &\quad \times \left(\left(\frac{\delta^{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3}\right)u' + \frac{x^i x^j}{r^2}u'' + O(r)|u'|\right), \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos (1.13) que também é verdade em um referencial ortonormal. Assim

$$\langle A_g, \nabla^2 u\rangle = I + II + III + IV + V,$$

onde

$$\begin{aligned} I &= \nabla_k A_{ij}(0)x^k \frac{\delta^{ij}}{r}u' \\ II &= \nabla_k A_{ij}(0)x^k\left(\frac{x^i x^j}{r^2}u'' - \frac{x^i x^j}{r^3}u'\right), \\ III &= \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l \frac{\delta^{ij}}{r}u', \\ IV &= \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l\left(\frac{x^i x^j}{r^2}u'' - \frac{x^i x^j}{r^3}u'\right) \end{aligned}$$

e

$$V = O(r^3)\nabla_i\nabla_j u + (\nabla_k A_{ij}(0)x^k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l) \times O(r)|u'|.$$

Note que, como $\nabla_k R_g(0) = 0$ e $A_{ij}\delta^{ij} = \sigma_1(A_g)$, então

$$I = \nabla_k A_{ij}(0)x^k \frac{\delta^{ij}}{r}u' = \frac{\nabla_k R_g(0)}{2(n-1)}\frac{x^k}{r} = 0.$$

Agora temos que, permutando os índices e usando o item (ii) do Corolário 1.17, chegamos em

$$\begin{aligned}
II &= \nabla_k A_{ij}(0)x^k x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\nabla_i A_{kj}(0)x^i x^k x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) + \frac{1}{3}\nabla_j A_{ik}(0)x^j x^i x^k \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\nabla_k A_{ji}(0)x^k x^j x^i \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \\
&= \frac{1}{3}x^i x^j x^k \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right)\left(\nabla_i A_{kj} + \nabla_j A_{ik} + \nabla_k A_{ji}\right)(0) = 0.
\end{aligned}$$

Como $A_{ij}\delta^{ij} = \sigma_1(A_g)$, então

$$III = \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l \frac{\delta^{ij}}{r}u' = \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l \sigma_1(A_g)(0)x^k x^l \frac{u'}{r}.$$

Permutando os índices duas vezes, usando o item (v) do Corolário 1.16 e (1.12), obtemos

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l \left(\frac{x^i x^j}{r^2}u'' - \frac{x^i x^j}{r^3}u'\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \\
&= \frac{1}{8}x^k x^l x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right)\left(\nabla_k\nabla_l A_{ij} + \nabla_l\nabla_i A_{jk} + \nabla_i\nabla_j A_{kl} + \nabla_j\nabla_k A_{li}\right)(0) \\
&= \frac{1}{8(n-2)}x^k x^l x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right)\Bigg(\nabla_k\nabla_l\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}R_g g_{ij}\right) + \\
&\quad + \nabla_l\nabla_i\left(R_{jk} - \frac{1}{2(n-1)}R_g g_{jk}\right) + \nabla_i\nabla_j\left(R_{kl} - \frac{1}{2(n-1)}R_g g_{kl}\right) + \\
&\quad + \nabla_j\nabla_k\left(R_{li} - \frac{1}{2(n-1)}R_g g_{li}\right)\Bigg)(0) \\
&= \frac{1}{8(n-2)}x^k x^l x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right)\Big(\nabla_k\nabla_l R_{ij} + \nabla_l\nabla_i R_{jk} + \nabla_i\nabla_j R_{kl} + \\
&\quad + \nabla_j\nabla_k R_{li}\Big)(0) - \frac{1}{4(n-1)(n-2)}x^k x^l x^i x^j \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right)\left(\nabla_k\nabla_l R_g g_{ij}\right)(0) \\
&= -\frac{r^2}{2(n-2)}\nabla_k\nabla_l \sigma_1(A_g)(0)x^k x^l \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2(n-2)}\nabla_k\nabla_l \sigma_1(A_g)(0)x^k x^l \left(u'' - \frac{u'}{r}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente por (1.13) obtemos

$$\begin{aligned} V &= O(r^3)\nabla_i\nabla_j u + (\nabla_k A_{ij}(0)x^k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l A_{ij}(0)x^k x^l) \times O(r)|u'| \\ &= O(r^3)\left[u''\frac{x^i x^j}{r^2} + u'\left(\frac{\delta^{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3}\right)\right] + O(r^2)|u'| \\ &= O(r^3)(u''O(1) + u'O(r^{-1})) + O(r^2)|u'| \\ &= |u''|O(r^3) + |u'|O(r^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$4\langle A_g, \nabla^2 u\rangle = \frac{2}{n-2}\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l\left[(n-1)\frac{u'}{r} - u''\right] + O(r^3)|u''| + O(r^2)|u'|.$$

Expandindo R_g em série de Taylor, temos

$$R_g = R_g(0) + \nabla_k R_g(0)x^k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l R_g(0)x^k x^l + O(r^3). \qquad (1.18)$$

Assim, como os dois primeiros termos são nulos pelo Corolário 1.16 e (1.14) temos que

$$\begin{aligned} -(n-2)\sigma_1(A_g)\Delta_g u &= -\frac{(n-2)}{2(n-1)}\left(\frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l R_g(0)x^k x^l + O(r^3)\right)\times \\ &\quad \times\left[u'' + \left(\frac{n-1}{r} + O(r^{N-1})\right)u'\right] \\ &= -(n-2)\left(\frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l + O(r^3)\right)\times \\ &\quad \times\left[u'' + \left(\frac{n-1}{r} + O(r^{N-1})\right)u'\right] \\ &= -\frac{n-2}{2}u''\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l \\ &\quad -\frac{(n-2)(n-1)}{2}\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l\frac{u'}{r} \\ &\quad -\frac{n-2}{2}u'\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l O(r^{N-1}) \\ &\quad +O(r^3)|u''| + O(r^2)|u'| + O(r^{N+2})|u'| \\ &= -\frac{n-2}{2}\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A_g)(0)x^k x^l\left[u'' + (n-1)\frac{u'}{r}\right] \\ &\quad +O(r^2)|u'| + O(r^3)|u''|. \end{aligned}$$

Além disso, expandindo $\nabla_l \sigma_1(A_g)$ e utilizando o fato que $\nabla_k R_g(0) = 0$ para todo k, obtemos que em uma base ortonormal

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \sigma_1(A_g), \nabla u \rangle &= \nabla_j \sigma_1(A_g) \nabla_j u \\
&= \nabla_j \sigma_1(A_g) \frac{x^j}{r} u' \\
&= (\nabla_k \nabla_j \sigma_1(A_g)(0) x^k + O(r^2)) \frac{x^j}{r} u' \\
&= \nabla_k \nabla_j \sigma_1(A_g)(0) x^k x^j \frac{u'}{r} + O(r^2)|u'|.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema 1.18 e (1.9), somando as parcelas obtemos

$$\begin{aligned}
P_g u &= \Delta_0^2 u + O(r^{N-1}) u''' + O(r^{N-2}) u'' + O(r^{N-3}) u' \\
&\quad + (6-n) \nabla_k \nabla_l \sigma_1(A)(0) x^k x^l \frac{u'}{r} + O(r^2)|u'| + O(r^3)|u''| \\
&\quad - \frac{n-2}{2} \nabla_k \nabla_l \sigma_1(A)(0) x^k x^l \left[u'' + (n-1)\frac{u'}{r} \right] + O(r^2)|u'| \\
&\quad + \frac{2}{n-2} \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l \left[(n-1)\frac{u'}{r} - u'' \right] + O(r^3)|u''| \\
&\quad - \frac{(n-4)}{2} \frac{1}{2(n-1)} \left[-\frac{1}{6} |W|^2(0) u + O(r) \right] + O(r^2)|u'| \\
&= \Delta_0^2 u + \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l \Bigg[(6-n)\frac{u'}{r} - \frac{n-2}{2} \left(u'' + (n-1)\frac{u'}{r} \right) \\
&\quad + \frac{2}{n-2} \left((n-1)\frac{u'}{r} - u'' \right) \Bigg] + \frac{n-4}{24(n-1)} |W|^2(0) u + O(r^3)|u''| \\
&\quad + O(r) u + O(r^{N-1}) u''' + O(r^{N-2}) u'' + O(r^{N-3}) u' + O(r^2)|u'| \\
&= \Delta_0^2 u + \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l \Bigg[\frac{u'}{r} \left(\frac{2(n-1)}{(n-2)} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 - n \right) \\
&\quad - u'' \left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{2}{(n-2)} \right) \Bigg] + \frac{n-4}{24(n-1)} |W|^2(0) u + O(r^3)|u''| \\
&\quad + O(r^2)|u'| + O(r) u + O(r^{N-1}) u''' + O(r^{N-2}) u'' + O(r^{N-3}) u',
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

1.5 Funções de Green

Considere em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ a função Γ, definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}|x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Note que $\Delta\Gamma(x) = 0$. Γ é dita uma solução fundamental do Laplaciano.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira e $q \in C^\infty(M)$. Considere o operador $L = \Delta_g + q$.

Definição 1.21. *Dado $p \in M$, uma função $G_p \in C^\infty(M\backslash\{p\})$ satistafzendo as seguintes condições*

(i) $LG_p(x) = 0$, para todo $x \in M\backslash\{p\}$,

(ii) $G_p(x) = \Gamma(x-p) + O(|x-p|^{3-n})$, para x próximo de p

é dita função de Green de L com singularidade (ou polo) em $p \in M$.

Seja $B_\varepsilon(p)$ a bola com centro em p e raio $\varepsilon > 0$. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$ obtemos pelo Teorema da Divergência e por (i) da definição acima que

$$\begin{aligned} \int_{M\backslash B_\varepsilon(p)} G_p(x) Lf(x) dv_g &= \int_{M\backslash B_\varepsilon(p)} LG_p(x) f(x) dv_g \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \left(G_p(x)\frac{\partial f}{\partial r}(x) - \frac{\partial G}{\partial r}(x) f(x) \right) dv_g \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \left(G_p(x)\frac{\partial f}{\partial r}(x) - \frac{\partial G}{\partial r}(x) f(x) \right) dv_g. \end{aligned}$$

Note que em $\partial B_\varepsilon(p)$ temos

$$G_p(x)\frac{\partial f}{\partial r}(x) = O(\varepsilon^{2-n}),$$

o que implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(p)} G_p(x)\frac{\partial f}{\partial r}(x) dv_g = 0.$$

Além disso, em $\partial B_\varepsilon(p)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_p}{\partial r}(x) f(x) &= (a_n|x|^{1-n} + O(|x|^{2-n}))\,(f(p) + O(|x|)) \\ &= a_n\varepsilon^{1-n} f(p) + O(\varepsilon^{2-n}), \end{aligned}$$

onde $a_n = \omega_{n-1}^{-1}$. Daí

$$\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \frac{\partial G_p}{\partial r}(x) f(x) d\omega_\varepsilon = a_n \varepsilon^{1-n} f(p) \int_{\partial B_\varepsilon(p)} d\omega_\varepsilon + \int_{\partial B_\varepsilon(p)} O(\varepsilon^{2-n}) d\omega_\varepsilon.$$

Agora veja que

$$vol(\partial B_\varepsilon(p)) = \int_{\partial B_\varepsilon(p)} d\omega_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon(p)} \sqrt{\det \tilde{g}} d\tilde{\omega}_\varepsilon = \int_{S_1(p)} \varepsilon^{n-1} \sqrt{\det \tilde{g}}(\varepsilon x) d\tilde{\omega}_1,$$

onde $\tilde{g}$ é a métrica induzida em $\partial B_\varepsilon(p)$. Como $\tilde{g} = \delta + O(|x|^2)$, então $\sqrt{\det \tilde{g}} = 1 + O(|x|)$. Assim,

$$vol(\partial B_\varepsilon(p)) = \omega_{n-1} \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} O(\varepsilon^{1-n}) d\omega_\varepsilon &= \int_{S_\varepsilon(p)} \sqrt{\det \tilde{g}} O(\varepsilon^{1-n}) d\tilde{\omega}_\varepsilon \\ &= \int_{S_1(p)} \varepsilon^{n-1} \sqrt{\det \tilde{g}}(\varepsilon x) O(\varepsilon^{2-n}) d\tilde{\omega}_1 \\ &= \int_{S_1(p)} \sqrt{\det \tilde{g}}(\varepsilon x) O(\varepsilon) d\tilde{\omega}_1 \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \frac{\partial G_p}{\partial r}(x) f(x) d\omega_\varepsilon = a_{n-1} \omega_{n-1} f(p) = f(p).$$

Portanto

$$\int_{M \setminus \{p\}} G_p L(f) dv_g = f(p).$$

Neste caso dizemos que $LG_p = \delta_p$, onde δ_p é a massa de Dirac em p.

Teorema 1.22. *Seja $L = \Delta_g + q : C^{2,\alpha}(M) \longrightarrow C^{0,\alpha}(M)$, onde $q \in C^\infty(M)$. Se L é invertível, então existe função de Green de L.*

Considere o Laplaciano conforme

$$L_g = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g.$$

Se $R_g > 0$, então L_g é invertível, e portanto do Teorema 1.22, segue que L_g possui uma função de Green. A respeito da função de Green para L_g temos a seguinte expansão

Proposição 1.23 (Lee-Parker [9])**.** *Seja G_p a função de Green de L_g com polo em p. Em coordenadas normais conformes $\{x^i\}$ em p, G_p tem a seguinte expansão*

$$G_p(x) = |x|^{2-n} \left(1 + \sum_{k=1}^{4} \psi_k(x)\right) + c \log |x| + O(1),$$

onde ψ_k são polinômios homogêneos de grau k e o termo do log *só aparecem se n é par. Além disso,* *(i) se $n = 3, 4, 5$ ou M é conformemente plana em uma vizinhança de p,*

$$G_p = |x|^{2-n} + A + O(r),$$

onde A é uma constante;

(ii) se $n = 6$,

$$G_p = |x|^{2-n} - \frac{1}{288a}|W_g(p)|^2 \log r + O(1);$$

(iii) se $n \geq 7$,

$$G_p = |x|^{2-n}\left[1 + \frac{1}{12a(n-4)}\left(\frac{|x|^4}{12(n-4)}|W(p)|^2 - \frac{\partial^2 R_g}{\partial x_j \partial x_i}(p)x^i x^j |x|^2\right)\right] + O(r^{7-n}).$$

Agora, para o bilaplaciano, temos que $\Delta^2|x|^{4-n} = 0$, em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ com $n \geq 5$.

Definição 1.24. *Dado $p \in M$, uma função $G_p \in C^\infty(M\backslash\{p\})$ satisfazendo as seguintes condições*

(i) $P_g G_p = 0$ em $M\backslash\{p\}$

(ii) $G_p(x) = \dfrac{1}{(n-2)(n-4)\omega_{n-1}}|x|^{4-n} + O(|x|^{5-n})$ para x próximo de p,

é dita função de Green de P_g com singularidade (ou polo) em $p \in M$.

Da mesma forma que no caso anterior, obtemos

$$\int_{M\backslash\{p\}} G_p P_g(f) dv_g = f(p), \text{ para todo } f \in C^\infty(M).$$

Assim, podemos escever $P_g G_p = \delta_p$. Além disso, temos

Teorema 1.25. *Se $P_g : C^{4,\alpha}(M) \longrightarrow C^{0,\alpha}(M)$ é invertível, então existe uma função de Green de P_g.*

1.6 Espaços de Sobolev

Agora falaremos sobre os espaços de Sobolev, e dos teoremas de mergulho de Sobolev, para mais detalhes ver [12] e [9].

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com elemento de volume dv_g e $p \geq 1$. Definimos

$$L^p(M) = \{u : M \to \mathbb{R} \text{ integrável}; ||u||_p < \infty\},$$

onde

$$||u||_p = \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aqui estamos considerando duas funções que coincidem q.t.p. como iguais. Desta forma, uma função em $L^p(M)$ é uma classe de equivalência de funções que coincidem q.t.p.

Agora, considere $k \in \mathbb{N}$, e $p \geq 1$. Definimos o espaço $W^{k,p}(M)$ como sendo o completamento com respeito a norma $||\cdot||_{W^{k,p}(M)}$ do espaço $C^\infty(M)$ em $L^p(M)$, onde

$$||u||^p_{W^{k,p}(M)} = \sum_{i=0}^{k} ||\nabla^k u||^p_p.$$

Lema 1.26. *Seja (M,g) uma variedade Riemannaiana compacta sem fronteira. Defina a seguinte norma*

$$\|u\|^2_{W^{2,2}(M),1} = \|\Delta_g u\|^2_2 + \|\nabla u\|^2_2 + \|u\|^2_2.$$

Então as normas $\|u\|_{W^{2,2}(M),1}$ e $\|u\|_{W^{2,2}(M)}$ são equivalentes.

Demonstração. Pela Fórmula Integral de Böchner, Corolário 1.10, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{W^{2,2}(M)} &= \int_M \left(|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2\right) dv_g \\
&= \int_M \left((\Delta_g u)^2 - Ric_g(\nabla_g u, \nabla_g u) + |\nabla u|^2 + u^2\right) dv_g \\
&\leq \int_M \left((\Delta_g u)^2 + k|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2\right) dv_g \\
&\leq c\|u\|^2_{W^{2,2}(M),1},
\end{aligned}$$

onde $Ric \geq -k$, para alguma constante positiva k.

Note que pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos

$$(\Delta_g u)^2 = g(\nabla^2 u, g)^2 \leq n|\nabla^2 u|^2.$$

Daí

$$\|u\|^2_{W^{2,2}(M),1} = \int_M \left((\Delta_g u)^2 + |\nabla u|^2 + u^2\right) dv_g \leq c\int_M \left(|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2\right) dv_g.$$

Disto segue o resultado. $\square$

Seja $(E, ||.||)$ um espaço de Banach. Dizemos que x_i converge fracamente para x e escrevemos $x_i \rightharpoonup x$, se $\varphi(x_i)$ converge para $\varphi(x)$, para todo $\varphi \in E'$, onde E', denota o espaço dual de E. Como o espaço $W^{2,2}(M)$ é reflexivo, já que é um espaço de Hilbert, podemos reescrever esta definição da seguinte maneira: se $(u_i)_i$ é uma sequência em $W^{2,2}$ que converge fracamente para $u \in W^{2,2}$, então

$$\lim_{i\to\infty} \int_M (\Delta_g u_i \Delta_g \varphi + \langle \nabla u_i, \nabla\varphi\rangle + u_i\varphi)\, dv_g = \int_M (\Delta_g u \Delta_g \varphi + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + u\varphi)\, dv_g,$$

para todo $\varphi \in W^{2,2}(M)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dado $0 < \alpha < 1$, defina

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

e

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega); \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}.$$

Dada uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira (M, g). Considere um número finito de cartas coordenadas (U_i, φ_i) tais que $B_2(0) = \varphi^{-1}(U_i)$ e $M = \bigcup_i \varphi_i(B_1(0))$.

Defina

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} = \sum_i \|f \circ \varphi_i\|_{C^{k,\alpha}(B_1(0))}.$$

Lema 1.27. *As normas geradas por duas famílias finitas de cartas coordenadas em M são equivalentes.*

Definição 1.28. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0,1)$. Defina o espaço de Hölder em M como*

$$C^{k,\alpha}(M) = \{f \in C^k(\Omega); \|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} < \infty\}.$$

Teorema 1.29 (Teorema de Compacidade)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n.*

1. *$W^{k,q}(M) \subset L^r(M)$, se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$. (Inclusão contínua).*

2. *(**Kondrakov**) $W^{k,q}(M) \subset\subset L^r(M)$, se $\frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$. (Inclusão compacta).*

3. *$W^{k,q}(M) \subset C^{r,\alpha}(M)$, se $\frac{1}{q} \leq \frac{k-r-\alpha}{n}$ e $\alpha \in (0,1)$. (Inclusão contínua).*

1.7 Operadores Diferenciais Elípticos

Agora falaremos um pouco sobre operadores diferencias elípitcos. Para mais detalhes ver [1].

Definição 1.30. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Um operador diferencial linear parcial $A(u)$ de ordem $2m$ sobre M, escrito numa carta local (U, φ), é da forma*

$$A(u) = \sum_{l=0}^{2m} a_{i_1 \ldots i_l} \nabla_{i_i} \nabla_{i_l} u,$$

onde $a_{i_1 \ldots i_l}$ são funções suaves em U e $u \in C^{2m}(M)$. Os termos de ordem $2m$ são ditos a parte principal.

O operador é dito elíptico em um ponto $x \in U$, se existe $\lambda(x) \geq 1$, tal que para todos os vetores v

$$||v||^{2m}\lambda^{-1}(x) \leq a_{i_1 \ldots i_{2m}} v_{i_1} \cdots v_{i_{2m}} \leq \lambda(x)||v||^{2m}. \tag{1.19}$$

Dizemos que o operador é uniformemente elíptico, se é possível tomar $\lambda(x)$ em (1.19) constante.

O Laplaciano e o bilaplaciano em uma variedade Riemanniana são operadores diferenciais elípticos lineares de segunda e quarta ordem, respectivamente. Portanto, o operador de Paneitz 1.9, é um operador elíptico. Para o Laplaciano temos o seguinte princípio do máximo

Teorema 1.31 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana conexa, h uma função suave não negativa e $u \in C^2(M)$ satisfazendo*

$$(-\Delta_g + h)u \geq 0.$$

Se u atinge seu mínimo $m \leq 0$, então u é constante sobre M.

Como o operador de Paneitz é de quarta ordem, um princípio do máximo análogo não é imediato.

1.7.1 Soluções Fracas

Seja A um operador diferencial linear de ordem $2m$ definido sobre uma variedade Riemanniana M, com ou sem bordo. Se $f \in L^p(M)$ e os coeficientes de A são mensuráveis e localmente limitados, dizemos que uma função $u \in W^{2m,p}(M)$ é uma solução forte em L^p, no sentido de $A(u) = f$, se existe uma sequência $\{u_i\}_i$ de funções em $C^\infty(M)$ tal que $u_i \to u$ em $W^{2m,p}(M)$ e $A(u_i) \to f$ em $L^p(M)$.

Definição 1.32. *Se A é um operador diferencial linear em M, dizemos que $u \in L^1(M)$ satisfaz $A(u) = f$ no sentido fraco ou no sentido de distribuição, se para toda função suave de suporte compacto φ, tem-se que*

$$\int_M uA^*(\varphi)dv_g = \int_M f\varphi dv_g,$$

onde A^* é a adjunta formal de A, obtida de A por integração por partes.

Observe que da definição do operador de Paneitz segue imediatamente que ele é autoadjunto com respeito ao produto interno de $L^2(M)$.

Teorema 1.33. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e A um operador linear elíptico em Ω de ordem $2m$ com coeficientes suaves. Suponha que u é uma solução fraca da equação $Au = f$, com $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então $u \in C^{k+2m,\alpha}(\Omega)$, com $0 < \alpha < 1$. Se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, então $u \in W^{k+2m,p}(\Omega)$.*

Capítulo 2

O Operador de Paneitz e sua Função de Green

Neste capítulo iremos mostrar um princípio do máximo para o operador de Paneitz e supondo que a curvatura escalar é não negativa e a $Q-$curvatura é semipositiva, isto é, $Q_g \geq 0$ e $Q_g > 0$ em algum ponto, existe uma função de Green para P_g. Além disso encontramos uma expansão para esta função de Green e mostramos um teorema da massa positiva.

2.1 Princípio do Máximo

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$. Suponha que*

(i) Q_g é semipositiva,

(ii) A curvatura escalar $R_g \geq 0$.

Então a curvatura escalar é estritamente positiva.

Demonstração. Por definição

$$Q_g = -\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g + c(n)R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2, \tag{2.1}$$

onde $c(n)$ é um contante positiva que só depende da dimensão de M.

Como Q_g é não negativa, segue que

$$\frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g \leq c(n)R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2 \leq c(n)R_g^2. \tag{2.2}$$

Pelo Princípio do Máximo Forte, Teorema 1.31, $R_g > 0$ ou $R_g \equiv 0$. No último caso, por (2.1) temos

$$Q_g = -c_2(n)|Ric_g|^2 \leq 0, \tag{2.3}$$

que é uma contradição, já que Q_g é positiva em algum ponto. □

Teorema 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$. Suponha*

(i) Q_g *é semipositiva,*

(ii) $R_g \geq 0$.

Se $u \in C^4(M)$ satisfaz

$$P_g u \geq 0, \tag{2.4}$$

então $u > 0$ ou $u \equiv 0$ sobre M^n. Além disso, se $u > 0$, então $h = u^{\frac{4}{n-4}} g$ é uma métrica com $Q-$curvatura não negativa e curvatura escalar positiva.

Demonstração. Para $\lambda \in [0, 1]$ defina

$$u_\lambda = (1 - \lambda) + \lambda u. \tag{2.5}$$

Então $u_0 \equiv 1$, enquanto $u_1 = u$. Suponha

$$\min_{M^n} u \leq 0. \tag{2.6}$$

Defina $\lambda_0 \in (0, 1]$ por

$$\lambda_0 = \min\{\lambda \in (0, 1] : \min_{M^n} u_\lambda = 0\}. \tag{2.7}$$

Então para $0 < \lambda < \lambda_0$, segue que $u_\lambda > 0$. Seja

$$g_\lambda = u_\lambda^{\frac{4}{n-4}} g. \tag{2.8}$$

Para $0 < \lambda < \lambda_0$, temos

$$Q_{g_\lambda} \geq 0 \tag{2.9}$$

e $Q_{g_\lambda} > 0$ em algum ponto. De fato, de (1.10) e (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} Q_{g_\lambda} &= \frac{2}{n-4} u_\lambda^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g u_\lambda \\ &= \frac{2}{n-4} u_\lambda^{-\frac{n+4}{n-4}} [P_g((1-\lambda) + \lambda u)] \\ &= \frac{2}{n-4} u_\lambda^{-\frac{n+4}{n-4}} [(1-\lambda) P_g(1) + \lambda P_g u] \\ &= \frac{2}{n-4} u_\lambda^{-\frac{n+4}{n-4}} \left[(1-\lambda)\frac{n-4}{2} Q_g + \lambda P_g u\right] \\ &\geq (1-\lambda) Q_g u_\lambda^{-\frac{n+4}{n-4}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $\lambda < \lambda_0 \leq 1$ e Q_g é semipositiva, segue que Q_{g_λ} é semipositiva.

Também afirmamos que para $0 \leq \lambda < \lambda_0$,

$$R_{g_\lambda} > 0. \tag{2.11}$$

Pelo Lema 2.1, segue que (2.11) vale para $\lambda = 0$. Se existe algum $\lambda_1 \in (0, \lambda_0)$ com $\min R_{g_{\lambda_1}} = 0$, então isso contradiz o Lema 2.1, pois neste caso teríamos que $Q_{g_{\lambda_1}}$ seria semipositiva, $R_{g_{\lambda_1}} \geq 0$ e com $\min R_{g_{\lambda_1}} = 0$.

Pela Proposição 1.14 com $f = \dfrac{2}{n-4} \log u$, obtemos

$$R_{g_\lambda} = u_\lambda^{-\frac{n}{n-4}} \left[-\frac{4(n-1)}{(n-4)} \Delta_g u_\lambda - \frac{8(n-1)}{(n-4)^2} \frac{|\nabla_g u_\lambda|^2}{u_\lambda} + R_g u_\lambda \right]. \tag{2.12}$$

Como $R_{g_\lambda} > 0$, isto implica que u_λ satisfaz a desigualdade diferencial

$$\Delta_g u_\lambda \leq \frac{(n-4)}{4(n-1)} R_g u_\lambda. \tag{2.13}$$

Tomando o limite quando $\lambda \nearrow \lambda_0$, isto também vale para $\lambda = \lambda_0$. Pelo Princípio do Máximo Forte, Teorema 1.31, (2.7) e (2.13) implicam que $u_{\lambda_0} \equiv 0$. Se $\lambda_0 = 1$, então acabou, já que $u_1 = u$. Portanto suponha $\lambda_0 \in (0, 1)$. Segue de (2.5) que

$$u = -\frac{(1 - \lambda_0)}{\lambda_0}.$$

Assim, da definição do operador de Paneitz

$$P_g u = -\left(\frac{n-4}{2} \right) \frac{(1 - \lambda_0)}{\lambda_0} Q_g.$$

Como por hipótese $Q_g > 0$ em algum ponto, obtemos uma contradição com o fato de $P_g u \geq 0$. Concluímos que $u \equiv 0$ ou $u > 0$.

Supondo $u > 0$, obtemos que a métrica $h = u^{\frac{4}{n-4}} g$ está bem definida e seguindo (2.10), obtemos que sua $Q-$curvatura não negativa. Mais uma vez, podemos construir uma família de funções $\{u_\lambda\}$ como em (2.5) e uma família de métricas g_λ como em (2.8). Para $\lambda = 0$ a curvatura escalar é positiva, pois coincide com R_g que é positiva.

Suponha que existe $\lambda_0 \in (0, 1]$ tal que o $\min R_{g_{\lambda_0}} = 0$. Como na demonstração do Lema 2.1, concluímos que $R_{g_{\lambda_0}} \equiv 0$. Porém, como $R_g > 0$ e uma classe conforme que admite uma métrica de curvatura escalar positiva não possui uma métrica de curvatura escalar nula, chegamos a uma contradição. Logo, $R_{g_\lambda} > 0$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. □

Proposição 2.3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão* $n \geq 5$. *Suponha que*

(i) Q_g *é semipositiva,*

(ii) $R \geq 0$.

Então o operador de Paneitz é positivo. Além disso, para todo $\varphi \in W^{2,2}(M)$, existe uma constante $c > 0$ que não depende de φ tal que

$$\int_M \varphi P_g \varphi dv_g \geq c \int_M \varphi^2 dv_g. \tag{2.14}$$

Consequentemente, a constante de Paneitz-Sobolev também é positiva, isto é,

$$q_0(M^n, g) \equiv \inf_{\varphi \in W^{2,2}(M)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_M \varphi P_g \varphi dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-4}} dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}}} > 0. \tag{2.15}$$

Dado $\varphi \in W^{2,2}(M)$ a notação $\displaystyle\int_M \varphi P_g \varphi dv_g$ significa (2.16).

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned}\int_M \varphi P_g \varphi dv_g &= \int_M \big(\varphi \Delta_g^2 \varphi + \varphi div_g\{(4A_g - (n-2)\sigma_1(A_g)g)(\nabla\varphi, \cdot)\} \\ &\quad + \frac{n-4}{2} Q_g \varphi^2\Big) dv_g.\end{aligned}$$

Note que por integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_M \varphi \Delta_g^2 \varphi dv_g &= \int_M \varphi \Delta_g(\Delta_g \varphi) dv_g \\ &= -\int_M \langle \nabla_g \varphi, \nabla_g(\Delta_g \varphi)\rangle_g dv_g \\ &= \int_M (\Delta_g \varphi)^2 dv_g,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_M \varphi div_g\{-(n-2)\sigma_1(A_g)\nabla_g \varphi\} dv_g &= -\int_M \langle \nabla_g \varphi, -(n-2)\sigma_1(A_g)\nabla_g \varphi\rangle)_g dv_g \\ &= (n-2)\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g \varphi|^2 dv_g\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_M \varphi div_g[4A_g(\nabla_g \varphi, \cdot)] dv_g &= \int_M -4\langle A_g(\nabla_g \varphi, \cdot), d\varphi\rangle_g dv_g \\ &= -4\int_M g^{ij} A_g(\nabla_g \varphi, \frac{\partial}{\partial x_i})\nabla_j \varphi dv_g \\ &= -4\int_M A_g\left(\nabla_g \varphi, g^{ij}\nabla_j \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}\right) dv_g \\ &= -4\int_M A_g(\nabla_g \varphi, \nabla_g \varphi) dv_g.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_M \varphi P\varphi dv_g &= \int_M \Big((\Delta_g\varphi)^2 - 4A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \\ &\quad + (n-2)\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 + \frac{n-4}{2}Q_g\varphi^2\Big)\, dv_g\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pela Fórmula Integral de Böchner, Corolário 1.10, temos

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g &= \int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g + \int_M Ric_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g \\ &= \int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g + \int_M (\sigma_1(A_g)g + (n-2)A_g)(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g \\ &= \int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g + (n-2)\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g \\ &\quad + \int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}-4\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv &= \int_M \Big(-\frac{4}{n-2}(\Delta_g\varphi)^2 + \frac{4}{n-2}|\nabla^2\varphi|^2 \\ &\quad + \frac{4}{n-2}\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2\Big)\, dv_g.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo em (2.16) encontramos que

$$\begin{aligned}\int_M \varphi P_g\varphi dv_g &= \int_M \Big(\frac{n-6}{n-2}(\Delta_g\varphi)^2 + \frac{4}{n-2}|\nabla^2\varphi|^2 \\ &\quad + \frac{(n-2)^2+4}{n-2}\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 + \frac{n-4}{2}Q_g\varphi^2\Big)\, dv_g \\ &\geq \int_M \frac{n-4}{2}Q_g\varphi^2 dv_g,\end{aligned} \tag{2.18}$$

para $n \geq 6$.

Para $n = 5$, note que

$$\begin{aligned}\int_M \varphi P_g\varphi dv_g &= \int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g - 4\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g \\ &\quad + 3\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M Q_g\varphi^2 dv_g,\end{aligned} \tag{2.19}$$

enquanto a $Q-$curvatura é dada por

$$\begin{aligned}0 \leq Q_g &= -\Delta_g\sigma_1(A_g) + 4\sigma_2(A_g) + \frac{1}{2}\sigma_1(A_g)^2 \\ &= -\Delta_g\sigma_1(A_g) + 4\left(\frac{\sigma_1(A_g)^2 - |A_g|^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\sigma_1(A_g)^2 \\ &= -\Delta_g\sigma_1(A_g) + 2\sigma_1(A_g)^2 - 2|A_g|^2 + \frac{1}{2}\sigma_1(A_g)^2 \\ &= -\Delta_g\sigma_1(A_g) - 2|A_g|^2 + \frac{5}{2}\sigma_1(A_g)^2,\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde na segunda igualdade utilizamos (1.7).

Considere o segundo termo do lado direito de (2.19). Como pelo Lema 2.1 a curvatura escalar é positiva, podemos utilizar a desigualdade $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, com $x = \frac{|A_g|}{\sqrt{\sigma_1(A_g)}}$ e $y = \sqrt{\sigma_1(A_g)}$, para obter

$$\begin{aligned} 4A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) &\leq 4|A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi)| \\ &\leq 4|A_g||\nabla_g\varphi|^2 \\ &\leq \frac{2|A_g|^2}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 + 2\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$4A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \leq \frac{2|A_g|^2}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 + 2\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2.$$

Por (2.20), obtemos

$$2\frac{|A_g|^2}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 \leq -\frac{\Delta_g\sigma_1(A_g)}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 + \frac{5}{2}\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2. \tag{2.21}$$

Daí

$$4\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi)dv_g \leq -\int_M \frac{\Delta_g\sigma_1(A_G)}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 dv_g + \frac{9}{2}\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g. \tag{2.22}$$

Para o primeiro termo do lado direito de (2.22), por integração por partes usando mais uma vez a desigualdade $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, com $x = \frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|}{\sigma_1(A_g)}\sqrt{|\nabla_g\varphi|}$ e $y = \frac{|\nabla^2\varphi|}{\sqrt{|\nabla_g\varphi|}}$, obtemos que

$$-\int_M \frac{\Delta_g\sigma_1(A_g)}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|^2 = \int_M \left\langle \nabla_g\left(\frac{|\nabla_g\varphi|^2}{\sigma_1(A_g)}\right), \nabla_g\sigma_1(A_g)\right\rangle dv_g$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M \left\langle \frac{\sigma_1(A_g)\nabla_g(|\nabla_g\varphi|^2) - |\nabla_g\varphi|^2\nabla_g\sigma_1(A_g)}{\sigma_1(A_g)^2}, \nabla_g\sigma_1(A_g)\right\rangle dv_g \\
&= \int_M \left(-\frac{|\nabla_g\varphi|^2|\nabla_g\sigma_1(A_g)|^2}{\sigma_1(A_g)^2} + \left\langle \frac{\nabla_g(|\nabla_g\varphi|^2)}{\sigma_1(A_g)}, \nabla_g\sigma_1(A_g)\right\rangle\right) dv_g \\
&= \int_M \left(-\frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|^2}{\sigma_1(A_g)^2}|\nabla_g\varphi|^2 + \left\langle \frac{\nabla_g\sigma_1(A_g)}{\sigma_1(A_g)}, \nabla_g|\nabla_g\varphi|^2\right\rangle\right) dv_g \\
&= \int_M \left(-\frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|^2}{\sigma_1(A_g)^2}|\nabla_g\varphi|^2 + 2\nabla^2\varphi\left(\frac{\nabla_g\sigma_1(A_g)}{\sigma_1(A_g)}, \nabla_g\varphi\right)\right) dv_g \\
&\leq \int_M \left(-\frac{|\nabla_g\sigma_1(A)|^2}{\sigma_1(A_g)^2 v}|\nabla_g\varphi|^2 + 2|\nabla^2\varphi|\frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|}{\sigma_1(A_g)}|\nabla_g\varphi|\right) dv_g \\
&\leq \int_M \left(-\frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|^2}{\sigma_1(A_g)^2}|\nabla_g\varphi|^2 + \frac{|\nabla_g\sigma_1(A_g)|^2}{\sigma_1(A_g)^2}|\nabla_g\varphi|^2 + |\nabla^2\varphi|^2\right) dv_g \\
&= \int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g,
\end{aligned}
$$

onde na quinta igualdade utilizamos que

$$\langle\nabla_g f, \nabla_g|\nabla_g h|^2\rangle = 2\nabla^2 h(\nabla_g f, \nabla_g h),$$

para quaisquer funções suaves f e h.

Substituindo isso em (2.22), temos que

$$4\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \leq \int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g + \frac{9}{2}\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g.$$

Em dimensão cinco de (2.17) temos que

$$\int_M |\nabla^2\varphi|^2 dv_g = \int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g - 3\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g - \int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g.$$

Substituindo isso, na igualdade anterior, chegamos a

$$
\begin{aligned}
4\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \quad \leq \quad & \int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g - 3\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) dv_g \\
& + \frac{7}{2}\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$7\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \leq \int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g + \frac{7}{2}\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g.$$

Portanto

$$-\int_M A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) \geq -\frac{4}{7}\int_M (\Delta_g\varphi)^2 dv_g - 2\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 dv_g.$$

Substituindo em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \varphi P_g \varphi dv_g &= \int_M (\Delta_g \varphi)^2 dv_g - \int_M A_g(\nabla_g \varphi, \nabla_g \varphi) + 3\int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g \varphi|^2 dv_g \\ &+\frac{1}{2}\int_M Q_g \varphi^2 dv_g \\ &\geq \frac{3}{7}\int_M (\Delta_g \varphi)^2 dv_g + \int_M \sigma_1(A_g)|\nabla_g \varphi|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M Q_g \varphi^2 dv_g. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De (2.18) e de (2.23), obtemos

$$\int_M \varphi P_g \varphi dv_g \geq c_n \int_M Q_g \varphi^2 dv_g, \tag{2.24}$$

onde c_n é uma constante que depende somente da dimensão de M.

Isto implica que se $P_g u \equiv 0$, então $u \equiv 0$, já que a $Q-$curvatura é semipositiva.

Para mostrar a desigualdade (2.14), é suficiente mostrar que

$$\inf_{u \in W^{2,2}(M) \setminus \{0\}} F(u) > 0,$$

onde

$$F(u) = \frac{\displaystyle\int_M u P_g u dv_g}{\displaystyle\int_M u^2 dv_g} > 0,$$

onde estamos utilizando a notação $\displaystyle\int_M u P_g u dv_g$ para representar o lado direito de (2.16). Utilizando os mergulhos de Sobolev e regularidade elíptica, como na demonstração da Proposição 2.4 a seguir, mostramos que esse ínfimo é atingido, em alguma função suave $u_0 \not\equiv 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(u_0+tv) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{\displaystyle\int_M (u_0+tv)P_g(u_0+tv)dv_g}{\displaystyle\int_M (u_0+tv)^2 dv_g} \\
&= \frac{2\displaystyle\int_M vP_g u_0 dv_g \int_M u_0^2 dv_g - 2\int_M u_0 P_g u_0 dv_g \int_M u_0 v dv_g}{\left(\displaystyle\int_M u_0^2 dv_g\right)^2} \\
&= 2\frac{\left(\displaystyle\int_M vP_g u_0 dv_g - F(u_0)\int_M u_0 v dvg\right)}{\displaystyle\int_M u_0^2 dv_g} \\
&= 2\frac{\displaystyle\int_M (P_g u_0 - F(u_0)u_0)\, v dv_g}{\displaystyle\int_M u_0^2 dv_g},
\end{aligned}$$

para todo $v \in W^{2,2}(M)$. Mas isto implica que $P_g(u_0) = F(u_0)u_0$. Assim, se $F(u_0) = 0$, de (2.24) concluímos que $u_0 \equiv 0$, contradição. Logo

$$\inf_{u \in W^{2,2}(M)\setminus\{0\}} F(u) > 0$$

e daí segue a desigualdade (2.14).
Afirmação: A norma

$$\|u\|_{P_g}^2 = \int_M uP_g u dv_g$$

é equivalente a norma $\|u\|_{W^{2,2}(M)}$.

De fato, de (2.16) e do Lema 1.26, obtemos que

$$\int_M uP_g u dv_g \leq c\int_M \left((\Delta_g u)^2 + |\nabla_g u|^2 + u^2\right) dv_g \leq c\|u\|^2_{W^{2,2}(M)}.$$

Para $n \geq 6$, de (2.18) obtemos que

$$\int_M uP_g u dv_g \geq c\int_M \left(|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2\right) dv_g,$$

já que $\sigma_1(A_g)$ é positivo e Q_g é não negativo. Daí somando (2.14) obtemos que

$$\int_M uP_g u dv_g \geq c\|u\|^2_{W^{2,2}(M)}.$$

Para $n=5$ do Lema 1.26, de (2.14) e (2.23), obtemos que

$$\int_M uP_g u dv_g \geq c\int_M \left((\Delta_g u)^2 + |\nabla_g u|^2 + u^2\right) dv_g \geq c\|u\|^2_{W^{2,2}(M)}.$$

Do Teorema 1.29, obtemos $W^{2,2}(M) \subset L^{\frac{2n}{n-4}}(M)$, onde a inclusão é contínua. Logo existe uma constante positiva c tal que

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-4}} \leq c\|u\|_{W^{2,2}(M)}.$$

Logo da afirmação segue que a constante de Paneitz Sobolev é positiva. □

Proposição 2.4. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana que satisfaz as hipóteses da Proposição 2.3. O operador de Panietz $P_g : C^{4,\alpha}(M) \longrightarrow C^{0,\alpha}(M)$ possui uma inversa limitada, isto é*

$$||P_g^{-1}(u)||_{C^{0,\alpha}(M)} \leq c||u||_{C^{4,\alpha}(M)},$$

onde c é uma constante positiva independente de u.

Demonstração. Dado $f \in L^2(M)$ fixo, defina o funcional $F : W^{2,2}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_M (\varphi P_g\varphi - 2f\varphi)\, dv_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M \Big((\Delta_g\varphi)^2 - 4A(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) + (n-2)\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 \\ &\quad + \frac{n-4}{2}Q_g\varphi^2 - 2f\varphi\Big)\, dv_g. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(u+tv) &= \int_M ((\Delta_g u)(\Delta_g v) - 4A_g(\nabla_g u, \nabla_g v) \\ &\quad + (n-2)\sigma_1(A_g)\langle\nabla_g u, \nabla_g v\rangle + \frac{n-4}{2}Q_g uv - fv\Big)\, dv_g. \end{aligned}$$

Logo $u \in W^{2,2}(M)$ é solução fraca de $P_g u = f$, se e somente se, u é ponto crítico de F. Temos que F é limitado inferiormente. De fato, como P_g é positivo, segue de (2.14) que

$$F(\varphi) \geq \frac{1}{2}\mu\int_M \varphi^2 dv_g - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_M \varphi^2 dv_g - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_M f^2 dv_g,$$

para todo $\varepsilon > 0$, onde μ é uma constante positiva. Aqui usamos a desigualdade

$$|f\varphi| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}f^2, \tag{2.25}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Daí, se $\varepsilon^2 < \mu$, temos que

$$F(\varphi) \geq \frac{(\mu - \varepsilon^2)}{2} \int_M \varphi^2 dv_g - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_M f^2 dv_g > -c,$$

onde $c = \dfrac{1}{2\varepsilon^2} \displaystyle\int_M f^2 dv_g \geq 0$. Tome uma sequência $(u_i)_i$ em $W^{2,2}(M)$ tal que

$$F(u_i) \to a = \inf_{W^{2,2}(M)} F.$$

Afirmação: A sequência $(u_i)_i$ é limitada em $W^{2,2}(M)$.

Se λ_1 é o primeiro autovalor de P_g, então $\lambda_1 > 0$ e

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{2,2}(M) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_M u P_g u dv_g}{\displaystyle\int_M u^2 dv_g}.$$

Assim de (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} F(\varphi) \ \geq \ & \frac{1}{2} \int_M \Big((\Delta\varphi)^2 - 4A_g(\nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi) + (n-2)\sigma_1(A_g)|\nabla_g\varphi|^2 \\ & + \frac{n-4}{2} Q_g \varphi^2 \Big) dv_g - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_M \varphi^2 dv_g - c_\varepsilon, \end{aligned}$$

onde c_ε é uma constante que não depende de φ.

Tomando $\varepsilon^2 \leq \dfrac{\lambda_1}{2}$ e usando a caracterização de λ_1, temos que

$$\begin{aligned} F(\varphi) & \geq \frac{1}{2} \int_M \varphi P_g \varphi dv_g - \frac{\lambda_1}{4} \int_M \varphi^2 dv_g - c_\varepsilon \\ & \geq \frac{1}{2} \int_M \varphi P_g \varphi dv_g - \frac{1}{4} \int_M \varphi P_g \varphi dv_g - c_\varepsilon \qquad (2.26) \\ & \geq \frac{1}{4} \int_M \varphi P_g \varphi dv_g - c_\varepsilon. \end{aligned}$$

De (2.18) e (2.26) temos que

$$\begin{aligned} F(\varphi) \ \geq \ & \frac{1}{4} \int_M \Big(\frac{n-6}{n-2} (\Delta_g \varphi)^2 + \frac{4}{n-2} |\nabla^2 \varphi|^2 + \frac{(n-2)^2 + 4}{n-2} \sigma_1(A_g) |\nabla_g \varphi|^2 \\ & + \frac{n-4}{2} Q_g \varphi^2 \Big) dv_g - c_\varepsilon, \end{aligned} \qquad (2.27)$$

para $n \geq 6$. Para $n = 5$ de (2.23), temos

$$F(\varphi) \geq \frac{3}{7} \int_M \left((\Delta\varphi)^2 + \sigma_1(A_g)|\nabla_g \varphi|^2 + \frac{1}{2} Q_g \varphi^2 \right) dv_g - c_\varepsilon. \tag{2.28}$$

Pela Fórmula Integral de Böchner, Corolário 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla^2 \varphi|^2 dv_g &= \int_M (\Delta_g \varphi)^2 dv_g - \int_M Ric(\nabla_g \varphi, \nabla_g \varphi) dv_g \\ &\leq \int_M (\Delta_g \varphi)^2 dv_g - c \int_M |\nabla_g \varphi|^2 dv_g, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde c é uma constante positiva que não depende de φ. Assim, de (2.28) e (2.29) obtemos que para $n = 5$ temos a desigualdade

$$F(\varphi) \geq \frac{3}{7} \int_M \left(|\nabla^2 \varphi|^2 + c|\nabla_g \varphi|^2 + \sigma_1(A_g)|\nabla_g \varphi|^2 + \frac{1}{2} Q_g \varphi^2 \right) dv_g - c_\varepsilon. \tag{2.30}$$

Pelo Lema 2.1, a curvatura escalar é positiva $R_g > 0$ e por hipótese $Q_g \geq 0$. Assim, de (2.27) e (2.30), obtemos que

$$F(\varphi) \geq c \int_M \left(|\nabla_g^2 \varphi|^2 + |\nabla_g \varphi|^2 \right) dv_g - c_\varepsilon, \tag{2.31}$$

onde c é uma constante positiva que não depende de φ. Como $(F(u_i))_i$ é uma sequência convergente, então $|F(u_i)| \leq K =$ constante para todo i, e de (2.31) obtemos que

$$\int_M \left(|\nabla_g^2 u_i|^2 + |\nabla_g u_i|^2 \right) dv_g \leq C, \tag{2.32}$$

para todo i, onde C é uma constante positiva que não depende de i.

Por outro lado, $|F(u_i)| \leq K$ para todo i, implica que

$$\frac{1}{2} \int_M u_i P_g u_i dv_g + \int_M f u_i dv_g \leq K,$$

e pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_M u_i P_g u_i dv_g \leq - \int_M f u_i dv_g + K \leq K + \left(\int_M f^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M u_i^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela caracterização de λ_1 obtemos

$$\lambda_1 \int_M u_i^2 dv_g \leq \int_M u_i P_g u_i dv_g \leq A + B \left(\int_M u_i^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica que

$$\lambda_1 \left(\int_M u_i^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \leq A \left(\int_M u_i^2 dv_g \right)^{-\frac{1}{2}} + B,$$

para todo i, onde A e B são constantes positivas. Como $\lambda_1 > 0$, segue que $(u_i)_i$ é limitada em $L^2(M)$, caso contrário, teríamos $||u_i||_2 \to \infty$ e $||u_i||_2^{-1} \to \infty$. Logo, disto e (2.32), $(u_i)_i$ é uma sequência limitada em $W^{2,2}(M)$. Como $W^{2,2}(M) \subset L^2(M)$, e a inclusão é compacta, Teorema de Compacidade de Kondrakov (Teorema 1.29), existe uma subsequência $(u_k)_k$ e $u \in W^{2,2}(M)$ tal que $u_k \to u$ em $L^2(M)$, e $u_k \rightharpoonup u$ em $W^{2,2}(M)$. Logo, $F(u_k) \to F(u)$ e então u é ponto crítico de F. Assim $P_g(u) = f$ no sentido fraco.

Suponha que $P_g u = 0$ no sentido fraco, para algum $u \in W^{2,2}(M)$. Daí, pela desigualdade (2.14) segue que $u \equiv 0$. Logo, P_g é injetiva.

Portanto dada $f \in L^2(M)$, existe uma única $u \in W^{2,2}(M)$ tal que $P_g u = f$ no sentido fraco. Pelo Teorema 1.33, se $f \in C^{0,\alpha}(M)$, então $u \in C^{4,\alpha}(M)$. Logo $P_g : C^{4,\alpha}(M) \longrightarrow C^{0,\alpha}(M)$ é invertível.

Afirmação: P_g é um operador fechado.

De fato, seja $(u_i)_i$ uma sequência em $C^{4,\alpha}(M)$ tal que $u_i \to u$ em $C^{4,\alpha}(M)$ e $P_g(u_i) \to v$ em $C^{0,\alpha}(M)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_M w P_g u_i dv_g &= \int_M \Big((\Delta_g w)(\Delta_g u_i) - 4A_g(\nabla_g w, \nabla_g u_i) \\ &\quad + (n-2)\sigma_1(A_g)\langle \nabla_g w, \nabla_g u_i \rangle + \frac{n-4}{2} Q_g w u_i \Big) dv_g, \end{aligned}$$

para todo $w \in W^{2,2}(M)$. Mas como $u_i \to u$ em $C^{4,\alpha}(M)$ e $P_g(u_i) \to v$ em $C_{0,\alpha}(M)$, então $u_i \to u$, $\nabla u_i \to \nabla_g u$, $\nabla^2 u_i \to \nabla^2 u$ e $P_g(u_i) \to v$ em $L^2(M)$. Isto implica que

$$\begin{aligned} \int_M w v dv_g &= \int_M \Big((\Delta_g w)(\Delta_g u) - 4A_g(\nabla_g w, \nabla_g u) \\ &\quad + (n-2)\sigma_1(A_g)\langle \nabla_g w, \nabla_g u \rangle + \frac{n-4}{2} Q_g w u \Big) dv_g, \end{aligned}$$

para todo $w \in W^{2,2}(M)$. Logo, $P_g u = v$ no sentido fraco, mas $v \in C^{0,\alpha}(M)$ implica que $u \in C^{4,\alpha}(M)$ e assim $P_g u = v$ no sentido clássico. Como $P_g(C^{4,\alpha}(M)) = C^{0,\alpha}(M)$, segue do Teorema da Função Inversa Limitada que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$||u||_{C^{4,\alpha}(M)} \leq c||P_g u||_{C^{0,\alpha}(M)},$$

para todo $u \in C^{4,\alpha}(M)$. Logo, $P_g^{-1} : C^{0,\alpha}(M) \longrightarrow C^{4,\alpha}(M)$ é limitada, isto é

$$||P_g^{-1}(u)||_{C^{4,\alpha}(M)} \leq c||u||_{C^{0,\alpha}(M)}.$$

□

2.2 A Função de Green

Concluímos da Proposição 2.4 e do Teorema 1.25 que sobre as hipóteses do Teorema 2.2, para qualquer $p \in M^n$ existe a função de Green para o operador de Paneitz, satisfazendo

$$P_g G_p = \delta_p,$$

onde δ_p é a massa de Dirac em p.

Proposição 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.2. Se G_p é a função de Green para o operador de Paneitz com polo em $p \in M^n$, então $G_p > 0$ sobre $M^n \backslash \{p\}$.*

Demonstração. Considere uma sequência de funções suaves $(f_j)_j$ não negativas sobre M, cujo suporte Ω_j tende a $\{p\}$ e tal que,

$$\int_M f_j dv_g = 1,$$

para todo j. Então

$$\begin{aligned} \int_M f_j u dv_g - u(p) &= \int_M f_j u dv_g - u(p) \int_M f_j dv_g \\ &= \int_M f_j u dv_g - \int_M f_j u(p) dv_g \\ &= \int_{\Omega_j} f_j (u - u(p)) dv_g. \end{aligned}$$

Note que dado $\varepsilon > 0$, como Ω_j se aproxima de p, temos que para todo j suficientemente grande $|u(x) - u(p)| < \varepsilon$ para todo $x \in \Omega_j$. Daí

$$\left| \int_{\Omega_j} f_j (u - u(p)) dv_g \right| \leq \varepsilon \int_{\Omega_j} f_j dv_g = \varepsilon,$$

para todo j suficientemente grande. Portanto

$$\int_M f_j u dv_g \to u(p).$$

Então $f_j \rightharpoonup \delta_p$ no sentido de distribuição. Pela Proposição 2.4 segue que existem funções suaves G_j definidas em M tais que

$$P_g G_j = f_j.$$

Assim

$$\int_M G_j P_g(u) dv_g = \int_M u P_g(G_j) dv_g = \int_M u f_j dv_g \longrightarrow u(p).$$

Mas como,

$$u(p) = \int_{M\backslash\{p\}} G_p P_g(u) dv_g, \tag{2.33}$$

segue que

$$\int_{M\backslash\{p\}} (G_p - G_j) P_g(u) dv_g \longrightarrow 0.$$

Portanto

$$G_j \to G_p,$$

em $C^4_{loc}(M^n\backslash\{p\})$. Pelo Teorema 2.2 tem-se $G_j > 0$ sobre M^n. Daí

$$G_p \geq 0,$$

sobre $M^n\backslash\{p\}$.

Suponha agora que exista $x_0 \neq p$ com $G_p(x_0) = 0$. Considere as sequências de métricas conformes $g_j = G_j^{\frac{4}{n-4}} g$. Como por construção $P_g G_j \geq 0$ temos, pelo Teorema 2.2 que as métricas g_j possuem curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura semipositiva. Pelo mesmo argumento utilizado em (2.13), G_j satisfaz,

$$\Delta_g G_j \leq \frac{(n-4)}{4(n-1)} R_g G_j,$$

sobre M^n. Tomando o limite $j \to \infty$ sobre $M^n\backslash\{p\}$ obtemos

$$\Delta_g G_p \leq \frac{(n-4)}{4(n-1)} R_g G_p.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Forte, Teorema 1.31, teríamos $G_p \equiv 0$, o que é uma contradição com (2.33). $\square$

Proposição 2.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira, satisfazendo as hipóteses*

(i) Q_g é semipositiva, e

(ii) $R_g \geq 0$.

Além disso, assuma uma das seguintes hipóteses

- *A dimensão $n = 5, 6$ ou 7; ou*
- *(M^n, g) é localmente conformemente plana e $n \geq 5$.*

Se G_p é a função de Green para o operador de Paneitz com polo em $p \in M$, existe uma constante α tal que em coordenadas normais conformes,

$$G_p(x) = \frac{c_n}{r^{n-4}} + \alpha + O^{(4)}(r), \tag{2.34}$$

onde $c_n = \frac{1}{(n-2)(n-4)\omega_{n-1}}$, ω_{n-1} *é o volume de* $\mathbb{S}^{n-1}$ *e* $f = O^{(k)}(r^m)$ *denota qualquer quantidade satisfazendo*

$$|\nabla^j f(x)| \leq C_j r^{m-j}$$

para $1 \leq j \leq k$, *onde* $r = |x| = d(x,p)$.

Demonstração. Suponha inicialmente que a dimensão é $n = 5, 6$ ou 7.

Seja $\tilde{g}$ a métrica das coordenadas normais conformes. Pelo Lema 1.20 obtemos

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{g}}(r^{4-n}) &= \Delta_0^2 r^{4-n} + \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l \mathfrak{Q}(r^{4-n}) + \frac{n-4}{24(n-1)}|W|^2(0) r^{4-n} \\
&\quad + O(r^3)(4-n)(3-n)r^{2-n} + O(r^2)(4-n)r^{3-n} + O(r)r^{4-n} \\
&\quad + O(r^{N-1})(4-n)(3-n)(2-n)r^{1-n} + O(r^{N-2})(4-n)(3-n)r^{2-n} \\
&\quad + O(r^{N-3})(4-n)r^{3-n} \\
&= \Delta_0^2(r^{4-n}) + \nabla_k \nabla_l \sigma_1(0) x^k x^l \mathfrak{Q}(r^{4-n}) + \frac{n-4}{24(n-1)}|W|^2(0) r^{4-n} \\
&\quad + O(r^{5-n}),
\end{aligned}$$

onde N é tomado tão grande quanto se queira e

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}(r^{4-n}) &= (4-n)\frac{r^{3-n}}{r}\left(\frac{2(n-1)}{(n-2)} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 - n\right) \\
&\quad -(4-n)(3-n)r^{2-n}\left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{2}{n-2}\right) \\
&= r^{2-n}(4-n)\left(\left(\frac{2(n-1)}{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 - n\right)\right. \\
&\quad \left. - (3-n)\frac{(n-2)^2+4}{2(n-2)}\right) \\
&= r^{2-n} d_n,
\end{aligned}$$

onde d_n depende apenas da dimensão.

Logo,

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{g}}(r^{4-n}) &= \Delta_0^2(r^{4-n}) + \nabla_k \nabla_l \sigma_1(A)(0) x^k x^l r^{2-n} d_n \\
&\quad + \frac{n-4}{24(n-1)}|W_g|^2(0) r^{4-n} + O(r^{5-n}).
\end{aligned}$$

Lembre-se que

$$\Delta_0^2 r^{4-n} = c_n^{-1}\delta_p,$$

no sentido fraco. Portanto,

$$\begin{aligned} P_{\tilde{g}}(r^{4-n}) &= c_n^{-1}\delta_p + \nabla_k\nabla_l\sigma_1(A)(0)x^kx^lr^{2-n}d_n \\ &\quad + \frac{n-4}{24(n-1)}|W_g|^2(0)r^{4-n} + O(r^{5-n}). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Como, $P_{\tilde{g}}(G_p) = \delta_p$, segue de (2.35)

$$P_{\tilde{g}}\left(-\frac{1}{c_n}r^{4-n}\right) = -\delta_p + O(r^{4-n}) = -P_{\tilde{g}}G_p + O(r^{4-n}),$$

o que implica que

$$P_{\tilde{g}}\left(G_p - \frac{1}{c_n}r^{4-n}\right) = O(r^{4-n}),$$

no sentido fraco em M. Pelo Teorema 1.33, se $O(r^{4-n})$ está em $L^p(M)$, então

$$G_p - \frac{1}{c_n}r^{4-n} \in W^{4,p}(M).$$

Note que, se $O(r^{4-n}) \in L^p$, então

$$\int_{M\setminus\{p\}} r^{(4-n)p}dv_g = \int_{M\setminus B_a(p)} r^{(4-n)p}dv_g + \int_{B_a(p)\setminus\{p\}} r^{(4-n)p}dv_g < \infty.$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{B_a(p)\setminus\{p\}} r^{(4-n)p}dv_g &\leq c\int_{B_a(0)\setminus\{0\}} r^{(4-n)p}dx \\ &= c\int_0^a\int_{S_r(0)} r^{(4-n)p}d\omega_r dr \\ &= c\int_0^a\int_{S_1(0)} r^{(4-n)p+n-1}d\omega dr \\ &= c_1\lim_{\varepsilon\to 0} r^{(4-n)p+n}\Big|_\varepsilon^a \\ &= c_1\lim_{\varepsilon\to 0}(a_{n,p} - \varepsilon^{(4-n)p+n}). \end{aligned}$$

Assim, para a integral convergir é necessário que $(4-n)p+n > 0$, ou seja, $p < \dfrac{n}{n-4}$. Pelo item (iii) do Teorema 1.29, $W^{4,p}(M) \subset C^{1,\alpha}(M)$ se $p > \dfrac{n}{3}$.

Logo p deve satisfazer

$$\frac{n}{3} < p < \frac{n}{n-4},$$

que se verifica para $n = 5$ e $n = 6$.

Para $n = 7$, escreva os termos da direita de (2.35) como

$$\nabla_k\nabla_l\sigma_1(A)(0)x^kx^ld_nr^{2-n} + \frac{n-4}{24(n-1)}|W_g|^2(0)r^{4-n} = \mathfrak{B}_0r^{-3} + \mathfrak{B}_2(\theta)r^{-3},$$

onde $\mathfrak{B}_0$ é uma constante, $\theta = x/|x|$ e $\mathfrak{B}_2(\theta) = c\theta_k\theta_l$, com c uma constante, é uma autofunção do Laplaciano em $\mathbb{S}^6$ com autovalor associado igual a 14. Usando o Laplaciano em coordenadas polares,

$$\Delta_0 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta f,$$

onde Δ_θ é o Laplaciano na esfera unitária, temos que

$$\begin{aligned}\Delta_0(\mathfrak{B}_2(\theta)r) &= \frac{n-1}{r}\mathfrak{B}_2(\theta) + \frac{1}{r^2}(-14\mathfrak{B}_2(\theta))r \\ &= \frac{n-1}{r}\mathfrak{B}_2(\theta) - \frac{14}{r}\mathfrak{B}_2(\theta) \\ &= \frac{n-15}{r}\mathfrak{B}_2(\theta).\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta_0^2(\mathfrak{B}_2(\theta)r) = 2\frac{n-15}{r^3}\mathfrak{B}_2(\theta) - \frac{(n-1)(n-15)}{r^3}\mathfrak{B}_2(\theta) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{n-15}{r}(-14)\mathfrak{B}_2(\theta).$$

Logo, para $n = 7$

$$\Delta_0^2(\mathfrak{B}_2(\theta)) = \frac{144}{r^3}\mathfrak{B}_2(\theta).$$

Daí da expressão em coordenadas do Laplaciano, (1.3), obtemos

$$\Delta_g(\mathfrak{B}_2(\theta)r) = O(r) + \Delta_0(\mathfrak{B}_2(\theta)r) = O(r^{-1}),$$

o que implica

$$\Delta_g^2(\mathfrak{B}_2(\theta)r) = \Delta_0^2(\mathfrak{B}_2(\theta)r) + O(r^{-1}) = 144\mathfrak{B}_2(\theta)r^{-3} + O(r^{-1}).$$

Também temos que

$$\Delta_0 r = \frac{n-1}{r},$$

o que implica que

$$\Delta_0^2 r = -24r^{-3}.$$

Portanto,

$$\Delta_g^2\left(-\frac{1}{24}\mathfrak{B}_0|x| + \frac{1}{144}\mathfrak{B}_2(\theta)|x|\right) = \mathfrak{B}_0|x|^{-3} + \mathfrak{B}_2(\theta)|x|^{-3} + O(r^2).$$

Como,

$$P_g u = \Delta_g^2 u + div_g\{(4A_g - (n-2)\sigma_1(A)g)(\nabla_g u, \cdot)\} + \frac{n-4}{2}Q_g u,$$

segue que

$$P_g(\mathfrak{B}_2(\theta)r) = \Delta_g^2(\mathfrak{B}_2(\theta)) + O(r^{-1}) = 144\mathfrak{B}_2(\theta)r^{-3} + O(r^{-1}),$$

$$P_g(r) = \Delta_g^2(r) + O(r^{-1}) = -24r^{-3} + O(r^{N-1})u'$$

e

$$P_g(r^{4-n}) = c_n^{-1}\delta_p + \mathfrak{B}_0 r^{-3} + \mathfrak{B}_2(\theta) r^{-3} + O(r^{5-n}).$$

Logo,

$$P_g\left(G_p - \frac{1}{c_n}r^{4-n} - \frac{1}{24}\mathfrak{B}_0 r - \frac{1}{144}\mathfrak{B}_2(\theta) r\right) = O(r^{-2}).$$

De mesmo modo, se $O(r^{-2}) \in L^p(M)$, então pelo Teorema 1.33, teremos que

$$G_p - \frac{1}{c_n}r^{4-n} - \frac{1}{24}\mathfrak{B}_0 r - \frac{1}{144}\mathfrak{B}_2(\theta) r \in W^{4,p}(M).$$

Entretanto, se $O(r^{-2}) \in L^p(M)$, então

$$\int_{M\backslash\{p\}} r^{-2p} dv_g = \int_{M\backslash B_a(p)} r^{-2p} dv_g + \int_{B_a(p)\backslash\{p\}} r^{-2p} dv_g < \infty.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_{B_a(p)\backslash\{p\}} r^{-2p} &\leq c\int_{B_a(0)\backslash\{0\}} r^{-2p} dx \\
&= c\int_0^a \int_{S_r(0)} r^{-2p} d\omega_r dr \\
&= c\int_0^a \int_{S_1(0)} r^{-2p+n-1} d\omega dr \\
&= c_1 \lim_{\varepsilon\to 0} r^{-2p+n}\Big|_\varepsilon^a \\
&= c_1 \lim_{\varepsilon\to 0}(a_{n,p} - \varepsilon^{-2p+n}).
\end{aligned}$$

Assim para a integral convergir, devemos ter $-2p + n > 0$, ou seja, $p < \frac{n}{2}$. E novamente do item *(iii)* do Teorema 1.29, $W^{4,p}(M) \subset C^{1,\alpha}(M)$ se $p > \frac{n}{3}$.

Portanto, para $n = 7$, p deve satisfazer

$$\frac{7}{3} < p < \frac{7}{2},$$

donde segue o resultado.

Para o caso localmente conformemente plana, a expansão da função de Green pode ser encontrada em [8]. □

2.3 Teorema da Massa Positiva

Nesta seção iremos utilizar um resultado provado por R. Schoen [13]. Mas antes vejamos uma definição. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita assintoticamente Euclidiana se existe um compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo $\varphi : M\backslash K \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash B_1(0)$, tal que a métrica nesse sistema de coordenadas é da forma

$$g_{ij}(y) = \delta_{ij} + O(|y|^{-2}),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ com $|y|$ grande, em coordenadas normais.

Proposição 2.7 (Schoen, 1984). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana assintoticamente Euclidiana. Se g possui curvatura de Ricci identicamente nula, então (M, g) é isométrica a $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana.*

A constante α da expansão (2.34) é chamada de massa do operador de Paneitz.

Teorema 2.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana satisfazendo as hipóteses da Proposição 2.6. Então a constante α da expansão (2.34) é não negativa. Além disso, $\alpha = 0$ se e somente se (M^n, g) é conformemente equivalente a esfera.*

Demonstração. Seja Γ_p denotando a função de Green do laplaciano conforme

$$L_g = -\Delta_g + \frac{(n-2)}{4(n-1)} R_g$$

com polo em p. Considere a métrica conforme a g definida por

$$\hat{g} = \Gamma_p^{\frac{4}{n-2}} g.$$

Afirmação: A métrica $\hat{g}$ é assintoticamente Euclidiana.

De fato, pela Proposição 1.23, temos que $\Gamma_p = |x|^{2-n} + O(\log|x|)$, o que implica $\Gamma^{\frac{4}{n-2}} = |x|^{-4} + O(\log|x|)$, para todo x próximo de zero. Além disso, se $I(x) = x|x|^{-2}$, então $I^*\delta = |x|^{-4}\delta$, onde δ é a métrica Euclidiana. Agora, sabendo que em coordenadas normais $(x_1, \ldots, x_n)$ temos que $g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2)$, segue que tomando $y = I(x)$, obtemos que

$$\hat{g}_{ij}(y) = (|y|^4 + O(\log|y|))|y|^{-4}(\delta_{ij} + O(|y|^{-2})) = \delta_{ij} + O(|y|^{-2}).$$

Pela Proposição 1.14 temos que

$$R_{\hat{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \Gamma_p^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(\Gamma_p) = 0.$$

Assim, a métrica $\hat{g}$ é assintoticamante Euclidiana com curvatura escalar nula.

Sejam $X^n = M^n \backslash \{p\}$ e

$$\Phi = \Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}} G_p.$$

Pela covariância conforme do operador de Paneitz (1.11), sobre X^n temos

$$P_{\hat{g}}\Phi = P_{\Gamma^{\frac{4}{n-2}} g}(\Gamma^{-\frac{n-4}{n-2}} G_p) = P_{(\Gamma^{\frac{n-4}{n-2}})^{\frac{4}{n-4}} g}(\Gamma^{-\frac{n-4}{n-2}} G_p) = \Gamma_p^{-\frac{n+4}{n-2}} P_g(G_p) = 0.$$

Como $\hat{g}$ possui curvatura escalar nula, temos que $A_{\hat{g}} = \dfrac{1}{n-2} Ric_{\hat{g}}$. Logo

$$Q_{\hat{g}} = -\frac{2}{(n-2)^2} |Ric_{\hat{g}}|^2 = -2|A_{\hat{g}}|^2.$$

Pela definição do operador de Paneitz,

$$0 = P_{\hat{g}}\Phi = \Delta_{\hat{g}}^2\Phi + div_{\hat{g}}\{(4A_{\hat{g}})(\nabla\Phi, \cdot)\} - (n-4)|A_{\hat{g}}|^2\Phi. \tag{2.36}$$

Seja B_δ a bola geodésica de centro em p e raio $\delta > 0$ na métrica g. Pelo Teorema da Divergência, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{M^n\backslash B_\delta} \Delta_{\hat{g}}^2\Phi dv_{\hat{g}} &= \int_{M^n\backslash B_\delta} div_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Delta_{\hat{g}}\Phi)dv_{\hat{g}} \\
&= \int_{\partial B_\delta} \langle\nabla_{\hat{g}}\Delta_{\hat{g}}\Phi, \nu\rangle d\sigma_{\hat{g}} \\
&= \int_{\partial B_\delta} \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_{\hat{g}}\Phi)d\sigma_{\hat{g}},
\end{aligned}$$

e

$$\int_{M^n\backslash B_\delta} div_{\hat{g}}\{4A_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi, \cdot)\}dv_{\hat{g}} = \int_{\partial B_\delta} 4A_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi, \nu)d\sigma_{\hat{g}},$$

onde ν é a normal para fora de ∂B_δ na métrica $\hat{g}$.

Segue que integrando (2.36) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M^n\backslash\{p\}} P_{\hat{g}}\Phi dv_{\hat{g}} \\
&= \int_{\partial B_\delta} \left\{\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_{\hat{g}}\Phi) + 4A_{\hat{g}}(\nabla\Phi, \nu)\right\} d\sigma_{\hat{g}} - (n-4)\int_{M^n\backslash\{p\}} |A_{\hat{g}}|^2\Phi dv_{\hat{g}}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Note que como $\hat{g}$ possui curvatura escalar nula, então

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_{\hat{g}}\Phi) = -\frac{\partial}{\partial\nu}(L_{\hat{g}}\Phi). \tag{2.38}$$

Além disso, pela invariância conforme de L_g temos que

$$L_{\hat{g}}(\Gamma_p^{-1}u) = \Gamma_p^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g u.$$

Logo,

$$L_{\hat{g}}\Phi = L_{\hat{g}}(\Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}}G_p) = \Gamma_p^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(\Gamma^{\frac{2}{n-2}}G_p).$$

Seja $r(x) = d_g(x,p)$ a função distância de x a p na métrica g. Da Proposição 1.23, temos que para $n = 5$

$$\Gamma_p = r^{2-n} + O(1).$$

Multiplicando por r^{n-2} e elevando a potência $\dfrac{2}{n-2}$ e expandindo o resultado em Série de Taylor, obtemos que

$$r^2\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} = (r^{n-2}\Gamma_p)^{\frac{2}{n-2}} = (1 + O(r^{n-2}))^{\frac{2}{n-2}} = 1 + O(r^{n-2}),$$

ou seja,

$$\Gamma_p^{\frac{2}{3}} = r^{-2} + O(r).$$

Para $n = 6$, novamente da Proposição 1.23 temos

$$\Gamma_p = r^{2-n} + O(\log r),$$

Do mesmo modo que o caso anterior, multiplicamos a iguadade por r^{n-2} e elevamos a potência $\dfrac{2}{n-2}$, e obtemos que

$$(r^{n-2}\Gamma_p)^{\frac{2}{n-2}} = (1 + O(r^{n-2}\log r))^{\frac{2}{n-2}}.$$

Como $\lim\limits_{r\to 0} r\log r = 0$, expandindo em Série de Taylor obtemos que

$$r^2\Gamma_p^{\frac{1}{2}} = 1 + O(r^4\log r),$$

e multiplicando por r^{-2}, obtemos

$$\Gamma_p^{\frac{1}{2}} = r^{-2} + O(r^2\log r).$$

E finalmente para $n = 7$, da Proposição 1.23 temos que

$$\Gamma_p = r^{2-n} + O(r^{-1}).$$

Multiplicando por r^{n-2}, elevando a potência $\dfrac{2}{n-2}$ e expandindo em Série de Taylor, obtemos que

$$(r^{2-n}\Gamma_p)^{\frac{2}{n-2}} = (1 + O(r^4))^{\frac{2}{n-2}} = 1 + O(r^4).$$

Logo,

$$\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} = \begin{cases} r^{-2} + O(r) \text{ se } n = 5, \\ r^{-2} + O(r^2\log r) \text{ se } n = 6, \\ r^{-2} + O(r^2) \text{ se } n = 7. \end{cases} \tag{2.39}$$

De (2.34), temos que

$$G_p = c_n r^{4-n} + \alpha + O(r),$$

o que implica que

$$\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} G_p = c_n r^{2-n} + \alpha r^{-2} + O(r^{-1}).$$

Pelo Lema 1.18, temos que

$$\Delta_g r^{2-n} = (2-n)(1-n)r^{-n} + (n-1)(2-n)r^{-n} + O(r^N) = O(r^N)$$

e

$$\Delta_g r^{-2} = 6r^{-4} - 2(n-1)r^{-4} + O(r^N) = -2(n-4)r^{-4} + O(r^N).$$

Daí, usando o fato que $R_g = O(r^2)$ em coordenadas normais conformes, obtemos

$$\begin{aligned} L_g(\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} G_p) &= -\Delta_g(\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} G_p) + \frac{(n-2)}{4(n-1)} R_g \Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} G_p \\ &= -c_n \Delta_g r^{2-n} - \alpha \Delta_g r^{-2} + O(r^{-3}) \\ &= 2(n-4)\alpha r^{-4} + O(r^{4-n}) \\ &= 2(n-4)\alpha r^{-4} + O(r^{-3}), \end{aligned}$$

para $5 \leq n \leq 7$. Além disso, por (2.39)

$$\Gamma_p^{-\frac{n+2}{n-2}} = r^{n+2} + O(r^{n+3}),$$

o que implica que

$$L_{\hat{g}}\Phi = \Gamma_p^{-\frac{n+2}{n-2}} L_p(\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} G_p) = 2(n-4)\alpha r^{n-2} + O(r^{n-1}).$$

Como, $\hat{g}(\nu, \nu) = 1$, segue que $\Gamma_p^{\frac{4}{n-2}} g(\nu, \nu) = 1$. Daí temos que,

$$g(\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} \nu, \Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} \nu) = 1.$$

Como ν é a normal para fora de $M \backslash B_\delta$, segue que

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\Gamma_p^{\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = -\Gamma_p^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Daí, temos que

$$\frac{\partial}{\partial r}(L_{\hat{g}}\Phi) = 2(n-2)(n-4)\alpha r^{n-3} + O(r^{n-2}).$$

O que implica de (2.39) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu}(L_{\hat{g}}\Phi)\Big|_{\partial B_\delta} &= -\Gamma_p^{-\frac{2}{n-2}} \left(\frac{\partial}{\partial r}(L_{\hat{g}}\Phi)\right) \\ &= -(\delta^2 + O(\delta^3))(2(n-2)(n-4)\alpha \delta^{n-3} + O(\delta^{n-2})) \\ &= -2(n-2)(n-4)\alpha \delta^{n-1} + O(\delta^n). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Além disso,

$$d\sigma_{\hat{g}} = \Gamma_p^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g = (r^{1-n} + O(r^{2-n})) d\sigma_g.$$

Portanto
$$\int_{\partial B_\delta} d\sigma_{\hat{g}} = \int_{\partial B_\delta} \Gamma_p^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g = \omega_{n-1}\delta^{1-n} + O(\delta^{2-n}). \tag{2.41}$$
Consequentemente, para a integral do primeiro termo em (2.37), de (2.38), (2.40) e (2.41) temos que
$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\delta} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_{\hat{g}}\Phi)d\sigma_{\hat{g}} &= (2(n-2)(n-4)\alpha\delta^{n-1} + O(\delta^n))\times \\ &\quad \times(\omega_{n-1}\delta^{1-n} + O(\delta^{2-n})) \\ &= 2(n-2)(n-4)\alpha\omega_{n-1} + O(\delta).\end{aligned} \tag{2.42}$$
Para a segunda integral de (2.37), temos que
$$\int_{\partial B_\delta} 4A_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi, \nu)d\sigma_{\hat{g}} = \frac{4}{n-2}\int_{\partial B_\delta} Ric_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi, \nu)d\sigma_{\hat{g}}.$$
Note que, para $n = 5$
$$\log\Gamma_p = \log(r^{-3} + O(1)) = -3\log r + \log(1 + O(r^3)) = -3\log r + O(r^3).$$
Para $n = 6$
$$\begin{aligned}\log\Gamma_p &= \log(r^{-4} + O(\log r)) \\ &= -4\log r + \log(1 + O(r^4\log r)) - 4\log r + O(r^4\log r),\end{aligned}$$
e para $n = 7$
$$\log\Gamma_p = \log(r^{-5} + O(r^{-1})) = -5\log r + \log(1 + O(r^4)) = -5\log r + O(r^4).$$
Logo, se $f = \dfrac{2}{n-2}\log\Gamma_p$, então
$$f = -2\log r + O(r^{n-3}).$$
Daí,
$$\nabla f = -\frac{2}{r}\nabla r + O(r^{n-4}),$$
o que implica que
$$\nabla f\otimes\nabla f = \frac{4}{r^2}\nabla r\otimes\nabla r + O(r^{n-5}).$$
Além disso, novamente pelo Lema 1.18
$$\begin{aligned}\Delta_g f &= \Delta_g(-2\log r + O(r^{n-3})) \\ &= \frac{2}{r^2} + O(r^{n-5}) - 2\frac{n-1}{r^2} + O(r^N) + O(r^{n-5}) \\ &= \frac{4-2n}{r^2} + O(r^{n-5}).\end{aligned}$$

Note que
$$\nabla_i f = -\frac{2}{r}\nabla_i r + O(r^{n-4})$$
e
$$\nabla_j\nabla_i f = \frac{2}{r^2}\nabla_j r\nabla_i r - \frac{2}{r}\nabla_j\nabla_i r + O(r^{n-5}),$$
ou seja,
$$\nabla^2 f = \frac{2}{r^2}\nabla r\otimes\nabla r - \frac{2}{r}\nabla^2 r + O(r^{n-5}).$$
Também temos que,
$$|\nabla f|^2 = \frac{4}{r^2} + O(r^{n-5}),$$
pois $|\nabla r| = 1$.

Como em coordenadas normais $g = \delta + O(r^2) = dr^2 + r^2 d\theta + O(r^2)$, onde (r,θ) são coordenadas polares, pela Proposição 1.14, temos que

$$\begin{aligned}
Ric_{\hat{g}} &= Ric_g - \frac{2(n-2)}{r^2}\nabla r\otimes\nabla r + \frac{2(n-2)}{r}\nabla^2 r + O(r^{n-5})\\
&\quad + \frac{4(n-2)}{r^2}\nabla r\otimes\nabla r - \left[\frac{4-2n}{r^2} + O(r^{n-5}) + \frac{4(n-2)}{r^2}\right]\times\\
&\quad \times(dr^2 + r^2 d\theta + O(r^2))\\
&= Ric_g + \frac{2(n-2)}{r^2}\nabla r\otimes\nabla r + \frac{2(n-2)}{r}\nabla^2 r - \frac{2n-4}{r^2}dr^2\\
&\quad -2(2-n)d\theta + O(1)\\
&= Ric_g + \frac{2(n-2)}{r}\nabla^2 r - 2(2-n)d\theta + O(1).
\end{aligned}$$

Pela expansão da função de Green

$$\Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}} = \begin{cases} (r^{-3}+O(1))^{-\frac{1}{3}} = r(1+O(r^3))^{-\frac{1}{3}} = r + O(r^4), & n=5\\ (r^{-4}+O(\log r))^{-\frac{1}{2}} = r^2(1+O(r^4\log r))^{-\frac{1}{2}} = r^2 + O(r^6\log r), & n=6\\ (r^{-5}+O(r^{-1}))^{-\frac{3}{5}} = r^3(1+O(r^4))^{-\frac{3}{5}} = r^3 + O(r^7), & n=7\end{cases}$$

o que implica que
$$\Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}}G_p = r^{n-4} + O(r^{n-1}).$$

Logo

$$\begin{aligned}\Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}}G_p &= (r^{n-4}+O(r^{n-1}))(c_n r^{4-n}+O(1))\\ &= c_n+O(r^{n-4})+O(r^3)+O(r^{n-1})\\ &= c_n+O(r^{n-4}).\end{aligned}$$

De (2.39) obtemos que

$$\Gamma_p^{-\frac{4}{n-2}}=O(r^4).$$

Agora, da expressão em coordenadas do gradiente, obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla_{\hat g}\Phi &= \Gamma_p^{-\frac{4}{n-2}}\nabla_g\Phi\\ &= \Gamma_p^{-\frac{4}{n-2}}(\nabla_g(\Gamma_p^{-\frac{n-4}{n-2}}G_p))\\ &= \Gamma_p^{-\frac{4}{n-2}}(\nabla_g(c_n+O(r^{n-4})))\\ &= \Gamma_p^{-\frac{4}{n-2}}(O(r^{n-5})(\nabla_g r+v)),\end{aligned}$$

onde v é um campo da ordem $O(r^{n-5})$. Daí, como $\nabla_g r=\dfrac{\partial}{\partial r}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla_{\hat g}\Phi &= O(r^4)(O(r^{n-5})\frac{\partial}{\partial r}+v)\\ &= O(r^{n-1})\frac{\partial}{\partial r}+\overline{v},\end{aligned}$$

onde $\overline{v}$ é um campo de ordem $O(r^{n-1})$. Assim

$$\begin{aligned}Ric_{\hat g}(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu) &= Ric_g(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu)+\frac{2(n-2)}{r}\nabla^2 r(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu)\\ &\quad -2(2-n)d\theta(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu)+O(1)(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu)\\ &= O(r^{n-1})Ric_g(\tfrac{\partial}{\partial r},\nu)+Ric_g(\overline{v},\nu)+O(1)(O(r^{n-1}),\nu),\end{aligned}$$

já que $\nabla^2 r$ anula-se na direção de $\dfrac{\partial}{\partial r}$ e

$$\nu=-\Gamma^{-\frac{2}{n-2}}\frac{\partial}{\partial r}=O(r^2)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Logo

$$\begin{aligned}Ric_{\hat g}(\nabla_{\hat g}\Phi,\nu) &= O(r^{n+1})Ric_g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)+O(r^2)Ric_g\left(\overline{v},\frac{\partial}{\partial r}\right)+O(r^{n+1})\\ &= O(r^{n+1}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\delta} Ric_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi,\nu)d\sigma_{\hat{g}} &= \int_{\partial B_\delta} \Gamma_p^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} Ric_{\hat{g}}(\nabla_{\hat{g}}\Phi,\nu)d\sigma_g \\
&= \int_{\partial B_\delta} O(r^{2(1-n)+n+1})d\sigma_g \\
&= \int_{\partial B_\delta} O(r^{3-n})d\sigma_g \\
&= \int_{\partial B_1} O(r^{3-n})\delta^{n-1}d\sigma_g \\
&= O(\delta^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\partial B_\delta} 4A_{\hat{g}}(\nabla\Phi,\nu)d\sigma_{\hat{g}} = O(\delta^2). \tag{2.43}$$

Daí, de (2.37), (2.42) e (2.43) obtemos que

$$2(n-2)(n-4)\omega_{n-1}\alpha = (n-4)\int_{M^n\backslash B_\delta} |A_{\hat{g}}|^2\Phi dv_{\hat{g}} + O(\delta^2).$$

Como $\Phi \geq 0$, segue que $\alpha \geq 0$. Além disso, se $\alpha = 0$, então $A_{\hat{g}} = \dfrac{1}{n-1}R_{\hat{g}} \equiv 0$. O que implica que $(X^n,\hat{g})$ é isométrico ao espaço Euclidiano pela Proposição 2.7. Como o $\mathbb{R}^n$ é conforme a $\mathbb{S}^n\backslash\{p\}$, segue o resultado. $\square$

Capítulo 3

Fluxo Gradiente da $Q-$curvatura

Neste capítulo (M^n, g) será uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$ com $Q-$curvatura semipositiva, isto é, não negativa em M e positiva em algum ponto, e com curvatura escalar não negativa. Definiremos um fluxo não local, mostraremos a existência de uma soluçao definida para todo tempo. Além disso, mostraremos algumas propriedades para o fluxo.

3.1 O Fluxo

Pela Proposição 2.3 segue que

$$\langle P_g u, u\rangle_{L^2(M)} = \int_M u P_g u dv_g > 0,$$

para toda função $u \in W^{2,2}(M)\backslash\{0\}$. Como P_g é auto-adjunta em $L^2(M)$, podemos definir um novo produto interno em $W^{2,2}(M)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi\rangle_{P_g} &= \int_M \varphi P_g \psi dv_g \\
&= \int_M ((\Delta_g \varphi)(\Delta_g \psi) - 4A_g(\nabla_g \varphi, \nabla_g \psi) \qquad (3.1)\\
&\quad +(n-2)\sigma_1(A_g) g(\nabla_g \varphi, \nabla_g \psi) + \frac{n-4}{2} Q_g \varphi\psi\Big) dv_g.
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{M}$ o espaço de métricas Riemannianas em M. Defina o funcional $Q-$curvatura total normalizado $\mathcal{Q} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{Q}(g) = Vol(M, g)^{-\frac{n-4}{n}} \int_M Q_g dv_g, \tag{3.2}$$

onde $Vol(M,g) = \displaystyle\int_M dv_g$. Note que $\mathcal{Q}(g) = \mathcal{Q}(\lambda g)$ para toda constante positiva λ. De fato, de (1.10) e da definição do operador de Paneitz, obtemos que

$$Q_{\lambda g} = \lambda^{-2} Q_g.$$

Além disso,

$$dv_{\lambda g} = \sqrt{\det(\lambda g)_{ij}}dx = \lambda^{\frac{n}{2}} dv_g$$

e

$$Vol(M, \lambda g) = \lambda^{\frac{n}{2}} Vol(M,g).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(\lambda g) &= Vol(M,\lambda g)^{\frac{4-n}{n}} \int_M Q_{\lambda g} dv_{\lambda g} \\
&= \lambda^{\frac{4-n}{2}} Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}} \int_M \lambda^{-2} Q_g \lambda^{\frac{n}{2}} dv_g \\
&= Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}} \int_M Q_g dv_g \\
&= \mathcal{Q}(g),
\end{aligned}$$

para toda constante positiva λ.

Considere uma família de métricas a um parâmetro dada por $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-4}} g$, onde $u(0) = 1$, $u'(0) = \frac{n-4}{4}\varphi$ e $u(t) \in C^\infty(M)$, para todo t. Note que

$$\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi g.$$

Assim, de (3.2) temos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{Q}(g(t)) = \frac{4-n}{n} Vol(M,g)^{\frac{4-2n}{n}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol\left(M, g(t)\right) \int_M Q_g dv_g +$$
$$+ Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}} \left(\int_M \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q_{g(t)} dv_g + \int_M Q_g \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} dv_{g(t)} \right).$$

Se $\dfrac{\partial g}{\partial t} = h$, para algum tensor simétrico h do tipo $(2,0)$, então temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} dv_g = \frac{1}{2}(tr_g h) dv_g.$$

Para uma prova veja Seção 2.4 de [3]. Logo,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(M, g(t)) &= \int_M \frac{d}{dt} dv_{u(t)^{\frac{4}{n-4}} g} \\
&= \frac{1}{2} \int_M tr_g(\varphi g) dv_g \\
&= \frac{n}{2} \int_M \varphi dv_g.
\end{aligned}$$

De (1.10) temos que
$$Q_{g(t)} = \frac{2}{n-4} u(t)^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g u(t),$$
e da definição de P_g, obtemos que
$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q_{g(t)} &= \frac{2}{n-4}\left(-\frac{n+4}{n-4}\right)\frac{n-4}{4}\varphi P_g(1) + \frac{2}{n-4}\cdot\frac{n-4}{4}P_g\varphi \\
&= -\frac{n+4}{2(n-4)}\cdot\frac{n-4}{2}\varphi Q_g + \frac{1}{2}P_g\varphi \\
&= -\frac{n+4}{4}\varphi Q_g + \frac{1}{2}P_g\varphi.
\end{aligned}$$
Assim, usando o Teorema de Divergência e o fato que M é compacta sem fronteira, obtem-se que
$$\int_M P_g\varphi dv_g = \frac{n-4}{4}\int_M Q_g\varphi dv_g.$$
Portanto obtemos que
$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{Q}(g(t)) &= \frac{4-n}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-2n}{n}}\frac{n}{2}\int_M \varphi dv_g \int_M Q_g dv_g \\
&\quad + Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M\left(-\frac{n+4}{4}\varphi Q_g + \frac{1}{2}P_g\varphi + Q_g\frac{n}{2}\varphi\right)dv_g \\
&= \frac{4-n}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\overline{Q}_g\int_M \varphi dv_g \\
&\quad + Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\left(-\frac{n+4}{4}\int_M \varphi Q_g dv_g\right. \\
&\quad \left. + \frac{n-4}{4}\int_M Q_g\varphi dv_g + \frac{n}{2}\int_M Q_g\varphi dv_g\right) \\
&= \frac{4-n}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\overline{Q}_g\int_M \varphi dv_g \\
&\quad + \left(-\frac{n+4}{4} + \frac{n-4}{4} + \frac{n}{2}\right)Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M \varphi Q_g dv_g \\
&= \frac{n-4}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M \varphi(Q_g - \overline{Q}_g)dv_g,
\end{aligned}$$
onde $\overline{Q}_g = Vol(M,g)^{-1}\int_M Q_g dv_g$ é o valor médio de Q_g. Portanto,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{Q}(g(t))=\frac{n-4}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M\varphi(Q_g-\overline{Q}_g)dv_g. \tag{3.3}$$

Desta forma segue que uma métrica g_0 é ponto crítico de $\mathcal{Q}$ se e somente se Q_{g_0} é constante.

Utilizando a inversa de P_g dada pela Proposição 2.4 e o fato que P_g é autoadjunta em $L^2(M)$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{Q}(g(t)) &= \frac{n-4}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M\varphi P_g(P_g^{-1}(Q_g-\overline{Q}_g))dv_g\\ &= \frac{n-4}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\int_M(P_g\varphi)(P_g^{-1}Q_g-\overline{Q}_g)dv_g \qquad (3.4)\\ &= \frac{n-4}{2}Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}\langle\varphi,P_g^{-1}(Q_g-\overline{Q}_g)\rangle_{P_g},\end{aligned}$$

onde o último produto interno é definido em (3.1). De (3.4) temos que o gradiente do funcional $\mathcal{Q}$ é dado por

$$\nabla_g\mathcal{Q}(g)=P_g^{-1}(Q_g-\overline{Q}_g).$$

O fluxo gradiente do funcional $Q-$curvatura total normalizado é definido como

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-2\nabla_g\mathcal{Q}(g)\cdot g. \tag{3.5}$$

Note que se $g(t)$ é uma solução para (3.5), então de (3.4) temos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{Q}(g(t))=-(n-4)Vol(M,g)^{\frac{4-n}{n}}|\nabla_g\mathcal{Q}(g)|^2,$$

o que implica que o funcional $\mathcal{Q}$ é decrescente ao longo da família de métricas $g(t)$.

Como o fluxo (3.5) é conforme, podemos escrever

$$g(t)=u(t)^{\frac{4}{n-4}}g. \tag{3.6}$$

Daí de (1.10) temos

$$Q_{g(t)}=\frac{2}{n-4}u(t)^{-\frac{n+4}{n-4}}P_gu(t), \tag{3.7}$$

e além disso,

$$dv_{g(t)}=u(t)^{\frac{2n}{n-4}}dv_g.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{g(t)} &= Vol(M,g(t))^{-1}\int_M Q_{g(t)}dv_{g(t)}\\
&= \frac{\dfrac{2}{n-4}\displaystyle\int_M u(t)^{-\frac{n+4}{n-4}}(P_g u(t))u(t)^{\frac{2n}{n-4}}dv_g}{\displaystyle\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}}dv_g} \\
&= \frac{\dfrac{2}{n-4}\displaystyle\int_M u(t)P_g u(t)dv_g}{\displaystyle\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}}dv_g}\\
&= \frac{2}{n-4}\mu(t),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde

$$\mu(t) = \frac{\displaystyle\int_M u(t)P_g u(t)dv_g}{\displaystyle\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}}dv_g} \tag{3.9}$$

depende apenas de t.

De (1.11), se $\overline{g} = u^{\frac{4}{n-4}}g$, então

$$v = P_{\overline{g}}(P_{\overline{g}}^{-1}(v)) = u^{-\frac{n+4}{n-4}}P_g(uP_{\overline{g}}^{-1}(v)),$$

o que implica que

$$u^{\frac{n+4}{n-4}}v = P_g(uP_{\overline{g}}^{-1}(v)),$$

e assim, temos que

$$P_{\overline{g}}^{-1}(v) = u^{-1}P_g^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}}v). \tag{3.10}$$

Portanto, usando (3.6), (3.8) e (3.10), obtemos que por um lado

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{4}{n-4}u^{\frac{8-n}{n-4}}\frac{\partial u(t)}{\partial t}g$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
-2\nabla_{g(t)}\mathcal{Q}(g(t))\cdot g(t) &= -2P_{g(t)}^{-1}(Q_{g(t)} - \overline{Q}_{g(t)})u(t)^{\frac{4}{n-4}}g\\
&= -2u(t)^{-1}P_g^{-1}(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}(Q_{g(t)} - \overline{Q}_{g(t)}))u(t)^{\frac{4}{n-4}}g\\
&= -2u(t)^{\frac{8-n}{n-4}}P_g^{-1}(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}(Q_{g(t)} - \overline{Q}_{g(t)}))g.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{n-4}{2}P_g^{-1}(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}(Q_{g(t)} - \overline{Q}_{g(t)})). \tag{3.11}$$

Porém de (3.7), temos que

$$P_g^{-1}(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}Q_{g(t)}) = \frac{2}{n-4}P_g^{-1}\left(P_g u(t)\right) = \frac{2}{n-4}u(t)$$

e

$$P_g^{-1}(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}\overline{Q}_{g(t)}) = \frac{2}{n-4}\mu(t)P_g^{-1}\left(u(t)^{\frac{n+4}{n-4}}\right).$$

Portanto substituindo em (3.11), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u(t) + \mu(t)P_g^{-1}\left(u(t)^{-\frac{n+4}{n-4}}\right). \tag{3.12}$$

Desta forma vamos considerar o seguinte fluxo

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & -u + \mu P_{g_0}^{-1}(|u|^{\frac{n+4}{n-4}}) \\ u(\cdot, 0) & = & 1, \end{array}\right. \tag{3.13}$$

onde $\mu(t)$ depende apenas de t e é dado por (3.9). Como P_{g_0} é positivo, segue diretamente da definição que $\mu(t) > 0$ para todo t.

Lema 3.1. *Seja $v(t)$ uma solução de*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial s} & = & -v + P_{g_0}^{-1}\left(|v|^{\frac{n+4}{n-4}}\right) \\ v(\cdot, 0) & = & 1. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Defina

$$\nu(t) = \frac{\displaystyle\int_M vP_{g_0}v dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M |v|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}},$$

$$s(t) = \int_0^t \nu(\tau)d\tau$$

e

$$u(x,t) = e^{s(t)-t}v(x, s(t)).$$

então u é solução de (3.13).

Demonstração. Inicialmente note que $u(x, 0) = v(x, 0) = 1$. Além disso,

$$s'(t) = \nu(t) = \frac{\displaystyle\int_M vP_{g_0}v dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M |v|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}} = \frac{\displaystyle\int_M e^{t-s(t)}uP_{g_0}(e^{t-s(t)}u) dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M |e^{t-s(t)}u|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}} = e^{-\frac{8}{n-4}(t-s(t))}\mu(t).$$

Assim, derivando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= s'(t)e^{s(t)-t}v(x,s(t)) - e^{s(t)-t}v(x,s(t)) + e^{s(t)-t}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}s'(t)\\
&= -u + s'(t)e^{s(t)-t}v(x,s(t)) + e^{s(t)-t}s'(t)(-v + P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}}))\\
&= -u + e^{s(t)-t}s'(t)P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}})\\
&= -u + e^{s(t)-t-\frac{8}{n-4}(t-s(t))+\frac{n+4}{n-4}(t-s(t))}\mu(t)P_{g_0}^{-1}(|u|^{\frac{n+4}{n-4}})\\
&= -u + \mu P_{g_0}(|u|^{\frac{n+4}{n-4}}).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *O fluxo* (3.14) *tem uma solução suave para* $0 \leq t < T$*, onde* $0 < T \leq \infty$*.*

Demonstração. Para a demonstração desse lema vamos utilizar o Teorema do Ponto Fixo para contrações. Defina para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ os espaços $X_\varepsilon = C^{4,\alpha}(M\times[0,\varepsilon])$ e

$$X_{\varepsilon,\delta} = \{u \in X_\varepsilon; u(x,0) = 1 \text{ e } \|u-1\|_{X_\varepsilon} \leq \delta\}.$$

Defina uma aplicação $T : X_{\varepsilon,\delta} \longrightarrow X_\varepsilon$ como

$$T(v)(x,t) = 1 - \int_0^t v(x,\tau)d\tau + \int_0^t P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}})(x,\tau)d\tau.$$

Agora, para todo $v \in X_{\varepsilon,\delta}$, temos que

$$\|T(v)-1\|_{X_\varepsilon} \leq \varepsilon\left(\|v\|_{X_\varepsilon} + \|P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}})\|_{X_\varepsilon}\right). \tag{3.15}$$

Como $v \in X_{\varepsilon,\delta}$, então

$$\|v\|_{X_\varepsilon} \leq \|v-1\|_{X_\varepsilon} + \|1\|_{X_\varepsilon} \leq c+\delta, \tag{3.16}$$

para alguma contante positiva c. Além disso, da Proposição 2.4, temos que

$$\|P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}})\|_{C^{4,\alpha}(M)} \leq \||v|^{\frac{n+4}{n-4}}\|_{C^{0,\alpha}(M)}.$$

Daí, de (3.16) obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|P_{g_0}^{-1}(|v|^{\frac{n+4}{n-4}})\|_{X_\varepsilon} < C,$$

para todo $v \in X_{\varepsilon,\delta}$. Logo, de (3.15) obtemos que $T(v) \in X_{\varepsilon,\delta}$ para todo $v \in X_{\varepsilon,\delta}$ se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Agora para $v_1, v_2 \in X_{\varepsilon,\delta}$, temos que

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|_{X_\varepsilon} \leq \varepsilon \left(\|v_1 - v_2\|_{X_\varepsilon} + \|P_{g_0}^{-1}(|v_1|^{\frac{n+4}{n-4}} - |v_2|^{\frac{n+4}{n-4}})\|_{X_\varepsilon} \right). \tag{3.17}$$

Utilizando a igualdade

$$|v_1|^{\frac{n+4}{n-4}} - |v_2|^{\frac{n+4}{n-4}} = \int_0^1 |v_2 + s(v_1 - v_2)|^{\frac{8}{n-4}} |v_2 - v_1| ds$$

e a Proposição 2.4, obtemos que

$$\|P_{g_0}^{-1}(|v_1|^{\frac{n+4}{n-4}} - |v_2|^{\frac{n+4}{n-4}})\|_{X_\varepsilon} \leq c\|v_1 - v_2\|_{X_\varepsilon},$$

onde c não depende de v_1 nem de v_2. Logo, de (3.17), segue que $T : X_{\varepsilon,\delta} \longrightarrow X_{\varepsilon,\delta}$ é uma contração para todo $\varepsilon > 0$ suficienteente pequeno, o que implica que existe $v \in X_{\varepsilon,\delta}$, tal que $T(v) = v$. Pela definição de T, este ponto fixo é uma solução de (3.14). $\square$

3.2 Propriedades do Fluxo

Nesta seção iremos encontrar propriedades das soluções do fluxo (3.13). Desta forma, daqui por diante $u \in C^{4,\alpha}(M \times [0,T])$, com $T > 0$, denotará sempre uma solução para (3.13). Para cada $t \in [0,T]$ utilizando regularidade elíptica, mostramos que $u(\cdot, t)$ é suave.

Proposição 3.3. *(i) $u(x,t) > 0$, para todo $t \in [0,T)$.*

(ii) $P_{g_0}u(x,t) > 0$, para todo $t \in (0,T)$.

(iii) $Q_{g(t)} > 0$, para todo $t \in (0,T)$.

Demonstração. Como u é solução de (3.13), então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u &= P_{g_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= -P_{g_0}u + \mu|u|^{\frac{n+4}{n-4}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u \geq -P_{g_0}u,$$

já que $\mu(t) \geq 0$. Integrando obtemos

$$\begin{aligned} P_{g_0}u(x,t) &= e^{-t}P_{g_0}u(0,x) \\ &= e^{-t}P_{g_0}(1) \\ &= \frac{n-4}{2}e^{-t}Q_{g_0}(x). \end{aligned}$$

Disto segue que $P_{g_0}u \geq 0$ e $P_{g_0}u > 0$ em algum ponto, já que a $Q-$curvatura semi-positva. Pelo Princípio do Máximo Forte para o operador de Paneitz, Teorema 2.2, segue que $u > 0$ para todo t no intervalo $[0, T)$. De (3.18) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u \geq -P_{g_0} u + \mu |u|^{\frac{n+4}{n-4}},$$

Multiplicando por e^t obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^t P_{g_0} u \right) \geq \mu |u|^{\frac{n+4}{n-4}} e^t,$$

e integrando temos

$$P_{g_0} u(x,t) \geq e^{-t} P_{g_0} u(x,0) + e^{-t} \int_0^t \mu(s) |u(x,s)|^{\frac{n+4}{n-4}} e^s ds,$$

o que implica que $P_{g_0}u > 0$ para $t \in (0, T)$. Daí, de (1.10) obtemos que $Q_{g(t)} > 0$ para todo $t \in (0, T)$. $\square$

Como $u > 0$, podemos reescrever (3.13) como

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -u + \mu P_{g_0}^{-1} (u^{\frac{n+4}{n-4}}), \tag{3.19}$$

com

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_M u P_{g_0} u dv_{g_0}}{\displaystyle\int_M u^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}}. \tag{3.20}$$

Lema 3.4.

$$\frac{d}{dt} \int_M u P_{g_0} u dv_{g_0} = 0.$$

Demonstração. De (3.19), (3.20) e utilizando o fato que P_{g_0} é autoadjunta, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M uP_{g_0}udv_{g_0} &= \int_M \left(\frac{\partial u}{\partial t}P_{g_o}u + uP_{g_0}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dv_{g_0}\\
&= 2\int_M uP_{g_0}(\frac{\partial u}{\partial t})dv_{g_0}\\
&= 2\int_M uP_{g_0}\left(-u+\mu P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)dv_{g_0}\\
&= 2\int_M \left(-uP_{g_0}u+\mu uP_{g_0}P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)dv_{g_0}\\
&= 2\int_M \left(-uP_{g_0}u+\mu u^{\frac{2n}{n-4}}\right)dv_{g_0}\\
&= -2\int_M uP_{g_0}udv_{g_0} + 2\mu\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}\\
&= -2\int_M uP_{g_0}udv_{g_0} + 2\frac{\int_M uP_{g_0}udv_{g_0}}{\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}}\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Defina

$$V(t) = Vol(M, u(t)^{\frac{4}{n-4}}g_0) = \int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}, \tag{3.21}$$

$$f = -u + \mu P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})$$

e o funcional

$$\mathcal{F}_{g_0}(u) = Vol(M, u^{\frac{4}{n-4}}g_0)^{-\frac{n-4}{n}}\int_M u(t)P_{g_0}u(t)dv_{g_0}. \tag{3.22}$$

Note que

$$\mathcal{F}_{g_0}(u) = \frac{n-4}{2}\mathcal{Q}(u^{\frac{4}{n-4}}g_0),$$

onde $\mathcal{Q}$ está definido em (3.2).

Lema 3.5.

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0} = \frac{2n}{n-4}\frac{1}{\mu}\int_M fP_{g_0}fdv_{g_0} \geq 0. \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt}\mu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\int_M uP_{g_0}udv_{g_0}}{V}\right) \leq 0. \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_{g_0}(u) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\int_M uP_{g_0}udv_{g_0}}{V^{\frac{n-4}{n}}}\right) \leq 0. \tag{3.25}$$

Em particular, o volume é crescente ao longo do fluxo, enquanto μ *e o quociente de Paneitz-sobolev são decrescentes. Além disso, o volume é limitado, isto é,*

$$V(t) \leq C, \tag{3.26}$$

onde C *não depende de* t*.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0} &= \frac{2n}{n-4}\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}}\frac{\partial u}{\partial t}dv_{g_0} \\
&= \frac{2n}{n-4}\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}}\left(-u+\mu P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)dv_{g_0} \qquad (3.27)\\
&= \frac{2n}{n-4}\int_M \left(-u^{\frac{2n}{n-4}}+\mu u^{\frac{n+4}{n-4}}P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_M fP_{g_0}fdv_{g_0} &= \int_M \left(-u+\mu P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)\left(-P_{g_0}u+\mu u^{\frac{n+4}{n-4}}\right)dv_{g_0} \\
&= \int_M \Big(uP_{g_0}u-\mu u^{\frac{2n}{n-4}}-\mu P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})P_{g_0}u \\
&\qquad +\mu^2 u^{\frac{n+4}{n-4}}P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\Big)dv_{g_0} \qquad (3.28)\\
&= \mu\int_M \left(-u^{\frac{2n}{n-4}}+\mu u^{\frac{n+4}{n-4}}P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})\right)dv_{g_0} \\
&= \frac{n-4}{2n}\mu\frac{d}{dt}\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0},
\end{aligned}$$

pois como P_{g_0} é autoadjunto, temos

$$\mu\int_M P_{g_0}^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}})P_{g_0}udv_{g_0} = \mu\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0} = \int_M uP_{g_0}udv_{g_0}.$$

Como $P_{g_0} > 0$, segue (3.23). Para mostrar (3.24) e (3.25) basta ver que pelo Lema 3.4 temos que

$$\int_M uP_{g_0}udv_{g_0}$$

não depende de t e $V(t)$ é não decrescente.

Além disso, como a constante de Paneitz Sobolev é positiva (2.15), temos que

$$0 < q_0 = \inf_{u \in W^{2,2}(M\setminus\{0\})} \mathcal{F}_{g_0}(u) \leq \mathcal{F}_{g_0}(u(t)).$$

Logo

$$V(t)^{\frac{n-4}{n}} \leq q_0^{-1} \int_M uP_{g_0}udv_{g_0}.$$

Como a integral do lado direito não depende de t pelo Lema 3.4, obtemos (3.26). □

Corolário 3.6.

$$\begin{aligned} &\int_0^T ||f||^2_{W^{2,2}(M)}dt \leq C_1(g_0), \\ &\int_0^T \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}} dt \leq C_2(g_0). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Demonstração. Como μ é não crescente, segue de (3.23) e de (3.26) que

$$\int_0^T \int_{M^n} fP_{g_0}fdv_0dt \leq \frac{n-4}{2n}\int_0^T \mu\frac{d}{dt}Vdt \leq \frac{n-4}{2n}\mu(0)(V(T)-V(0)) \leq c,$$

onde c não depende de T. Da afirmação na página 31 segue a primeira igualdade em (3.29). Para a segunda igualdade, como a constante de Sobolev é positiva (2.15), temos que

$$\int_0^T \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}} dt \leq q_0^{-1}\int_0^T\int_M fP_{g_0}fdv_{g_0}dt \leq C.$$

□

Proposição 3.7. *O fluxo (3.13) possui uma solução suave para todo tempo. Além disso,*

$$u(t) \leq C_1e^{C_2t}, \tag{3.30}$$

onde $C_1, C_2 > 0$ são constantes independentes de t. Além disso, $u(t)$ está definida para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $s > 1$. Da Proposição 3.3 temos que $u(t) > 0$ e $P_{g_0}u(t) > 0$ enquanto a solução existe. Note que, como em (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0} &= s\int_M (P_{g_0}u)^{s-1}\frac{\partial}{\partial t}(P_{g_0}u)dv_{g_0} \\
&= s\int_M (P_{g_0}u)^{s-1}(-P_{g_0}u+\mu u^{\frac{n+4}{n-4}})dv_{g_0} \qquad (3.31)\\
&= -s\int_M (P_{g_0})^s dv_{g_0} + s\mu\int_M (P_{g_0}u)^{s-1}u^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $p = \dfrac{s}{s-1}$ e $q = s$, na segunda integral, obtemos

$$\int_M (P_{g_0}u)^{s-1}u^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{g_0} \leq \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}}\left(\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}s}dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3.32}$$

Suponha que

$$\frac{2n}{n-4} \leq s \leq \frac{n}{4}. \tag{3.33}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder com $p = \dfrac{n}{n-4s} > 1$ e $q = \dfrac{n}{4s} > 1$, e fazendo

$$u^{\frac{n+4}{n-4}s} = u^s u^{\frac{8s}{n-4}},$$

obtemos

$$\left(\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}s}dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_M u^{\frac{ns}{n-4s}}dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4s}{ns}}\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-4}}dv_{g_0}\right)^{\frac{4}{n}}. \tag{3.34}$$

Pelo Teorema 1.29, $W^{4,s}(M) \subset L^{\frac{ns}{n-4s}}(M)$ continuamente para $1 < s < \frac{n}{4}$. Como $P_{g_0} > 0$ temos $\|u\|_{W^{4,s}(M)}$ é equivalente a norma $\|P_{g_0}u\|_{L^s(M)}$. Portanto,

$$\left(\int_M u^{\frac{ns}{n-4s}}dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4s}{ns}} \leq C_s\left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{3.35}$$

para s satisfazendo (3.33). De (3.32), (3.34) e (3.35) temos

$$\int_M (P_{g_0}u)^{s-1}u^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{g_0} \leq \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}}\left(\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}s}dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_M u^{\frac{ns}{n-4s}} dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4s}{ns}} \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}\right)^{\frac{4}{n}} \\
&\leq C_s \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}\right)^{\frac{4}{n}} \left(\int (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq C_s \int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0} V(t)^{\frac{4}{n}}.
\end{aligned}
$$

Pela limitação uniforme do volume, Lema 3.5, obtemos que

$$
\int_M (P_{g_0}u)^{s-1} u^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{g_0} \leq C_s \int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}. \tag{3.36}
$$

E substituindo em (3.31)

$$
\frac{d}{dt}\int_M (Pg_0u)^s dv_{g_0} \leq C_s \int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}, \tag{3.37}
$$

para todo s satisfazendo $\dfrac{2n}{n-4} < s < \dfrac{n}{4}$, já que μ é não crescente. Integrando, obtemos que

$$
\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0} \leq C_0 e^{C_s t}, \tag{3.38}
$$

para $0 \leq t \leq T$. De (3.35) e de (3.38), obtemos

$$
||u||_{L^{\frac{ns}{n-4s}}} \leq C_1 e^{C_s' t}. \tag{3.39}
$$

com $1 < s < n/4$. Isto implica que

$$
||u||_{L^p} \leq C_3 e^{C_p t}, \tag{3.40}
$$

Agora para $s > n/4$, de (3.32) e de (3.40), temos

$$
\begin{aligned}
\int_M (P_{g_0}u)^{s-1} u^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{g_0} &\leq \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_M u^{\frac{n+4}{n-4}s} dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}} (C_3 e^{C_n t})^{\frac{1}{s}} \\
&\leq C_4 e^{C_5 t} \left(\int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0}\right)^{\frac{s-1}{s}} \\
&\leq \mu^{-1} \int_M (P_{g_0}u)^s dv_{g_0} + C_6 e^{C_7 t},
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

onde na última igualdade, usamos a desigualdade de Young, com $p = s$, $q = \dfrac{s}{s-1}$, $a = \dfrac{\mu^{\frac{1}{q}}}{q} C_4 e^{C_5 t}$ e $b = q\mu^{-\dfrac{1}{q}} \left(\int_M (P_{g_0} u)^s dv_{g_0} \right)^{\frac{s-1}{s}}$.

Substituindo (3.41) em (3.31),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_M (P_{g_0} u)^s dv_{g_0} &\leq -s \int_M (P_{g_0})^s dv_{g_0} + s \int_M (P_{g_0} u)^s dv_{g_0} + C_6 e^{C_7 t} \\
&\leq C_6 e^{C_7 t}.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

Integrando obtemos que (3.38) vale para todo $s > 1$. Isto implica que

$$\|u\|_{W^{4,s}(M)} \leq C' e^{Ct},$$

para todo $s > 1$. Pelo item (iii) do Teorema 1.29, temos que

$$||u||_{C^{0,\alpha}(M)} \leq \|u\|_{W^{4,s}(M)} \leq C' e^{Ct},$$

para algum $\alpha \in (0, 1)$ e $s > n/4$. Isto implica (3.30). Daí, de (3.18) obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{g_0} u \leq -P_{g_0} u + Ce^{At},$$

o que implica

$$P_{g_0} u \leq Ce^{Dt}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{C^{4,\alpha}(M)} \leq C_1 e^{C_2 t}.$$

Disto concluímos que $u(t)$ está definida para todo $t > 0$, caso contrário, sua norma não poderia ser limitada. □

Capítulo 4

Construindo os Dados Iniciais

Neste capítulo (M, g_0) é uma variedade Riemanniana satisfazendo as hipóteses do Teorema Principal. Ele está dividido em duas seções. Na primeira consideramos o caso em que a dimensão é maior ou igual a 8 e a métrica não é localmente conformemente plana. E na segunda o caso em que a dimensão é 5, 6 ou 7, ou a métrica é localmente conformemente plana. Em ambos os casos encontramos uma métrica h conforme a g_0 ainda satisfazendo as hipóteses do Teorema Principal porém com $\mathcal{F}_h(1)$ estritamente menor que a constante de Sobolev da esfera canônica. Na segunda seção o Teorema da Massa Positiva é fundamental para a construção da função teste.

4.1 Caso $n \geq 8$ e não Localmente Conformemente Plana

Nesta seção (M^n, g_0) será uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira que não é localmente conformemente plana de dimensão $n \geq 8$ com $Q-$curvatura é semi-positiva e curvatura escalar não negativa.

Dado $x_0 \in M$, seja $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g_0$ a métrica dada pelo Teorema 1.15 que nos dá coordenadas normais conformes em x_0, com N suficientemete grande. Dado $\varepsilon > 0$, considere a função definida por

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)\varphi(x)}{(\varepsilon^2 + d_{\tilde{g}}(x, x_0)^2)^{\frac{n-4}{2}}},$$

onde $\eta(x)$ é uma função radial com suporte na bola $B_{2\delta}(x_0)$ e igual a 1 na bola $B_\delta(x_0)$, onde $\delta > 0$ é fixo.

Lema 4.1.

$$\mathcal{F}_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon) \leq S_n - c_n \varepsilon^4 |\log \varepsilon| |W_{g_0}(x_0)|^2,$$

para $n = 8$, *e*

$$\mathcal{F}_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon) \leq S_n - c_n \varepsilon^4 |W_{g_0}(x_0)|^2,$$

para $n \geq 9$, onde $\mathcal{F}_{g_0}$ está definido em (3.22) e

$$S_n = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_0 \varphi)^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}} = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Delta_0^2 \varphi dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}} \tag{4.1}$$

é a constante de Paneitz Sobolev do espaço Euclidiano.

É conhecido que

$$S_n = \frac{n(n^2-4)(n-4)\omega_n^{\frac{4}{n}}}{16},$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, veja [8]. Além disso, se

$$v_\lambda(x) = \mu \left(\frac{\lambda}{\lambda + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}},$$

onde $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então

$$S_n = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} v_\lambda \Delta_0^2 v_\lambda dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} v_\lambda^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}}. \tag{4.2}$$

Portanto, se

$$f_\varepsilon(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}, \tag{4.3}$$

com $\varepsilon > 0$. Então de (4.8), temos

$$\Delta_0^2 f_\varepsilon = n(n-4)(n^2-4)\frac{\varepsilon^{\frac{n+4}{2}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+4}{2}}} = n(n-4)(n^2-4) f_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}, \tag{4.4}$$

o que implica que

$$f_\varepsilon \Delta_0^2 f_\varepsilon = n(n-4)(n^2-4) f_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}.$$

Logo, de (4.2) temos que

$$S_n = n(n-4)(n^2-4)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{4}{n}}. \tag{4.5}$$

Lema 4.2. *Se $\tilde{g}$ é como acima, se definirmos*

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\varepsilon^2 + d_{\tilde{g}}(x, x_0)^2)^{\frac{n-4}{2}}},$$

então em $B_{2\delta}(x_0)$, temos

$$P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) = \frac{n(n-4)(n^2-4)\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} + \frac{O(1)}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-4}{2}}}. \tag{4.6}$$

Além disso, pela covariância conforme do operador de Paneitz (1.11), temos que $\mathcal{F}_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon) = \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)$.

Demonstração. Inicialmente note que, $dv_{\tilde{g}} = \varphi^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}$ e $P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) = \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0}(\varphi u_\varepsilon)$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) &= \frac{\displaystyle\int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}{\left(\displaystyle\int_M |u_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= \frac{\displaystyle\int_M u_\varepsilon \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g_0}(\varphi u_\varepsilon) \varphi^{\frac{2n}{n-4}} d_{g_0}}{\left(\displaystyle\int_M |u_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} \varphi^{\frac{2n}{n-4}} d_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= \frac{\displaystyle\int_M \tilde{u}_\varepsilon P_{g_0} \tilde{u}_\varepsilon d_{g_0}}{\left(\displaystyle\int_M |\tilde{u}_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} d_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= F_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Note que se $x \in B_{2\delta}(x_0) \backslash B_\delta(x_0)$, então

$$\frac{1}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} \leq \frac{1}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

Daí a estimativa segue do Lema 1.20. Portanto, basta mostrar a estimativa em $B_\delta(x_0)$, onde $\eta \equiv 1$. Assim vamos estimar

$$P_{\tilde{g}}\left((\varepsilon^2+r^2)^{\frac{4-n}{2}}\right).$$

Pelo Lema 1.18 temos que

$$\Delta_{\tilde{g}}^2 f = \Delta_0^2 f + O(r^{N-1}) f''' + O(r^{N-2}) f'' + O(r^{N-3}) f', \tag{4.7}$$

para toda função radial f, onde Δ_0 denota o laplaciano Euclidiano e N é tão grande quanto queira. Assim, se $f = (\varepsilon^2+r^2)^{\frac{4-n}{2}}$, temos

$$f'(r) = (4-n) r (\varepsilon^2+r^2)^{\frac{2-n}{2}},$$

$$
\begin{aligned}
f''(r) &= (4-n)(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{2-n}{2}} + (2-n)(4-n)r^2(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n}{2}} \\
&= (\varepsilon^2+r^2)^{\frac{2-n}{2}}\left[4-n+(2-n)(4-n)r^2(\varepsilon^2+r^2)^{-1}\right] \\
&\leq (\varepsilon^2+r^2)^{\frac{2-n}{2}}\left[4-n(2-n)(4-n)\right] \\
&\leq \frac{(3-n)(4-n)}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-2}{2}}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f'''(r) &= (2-n)(4-n)r(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n}{2}} + 2(2-n)(4-n)r(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n}{2}} \\
&\quad -n(2-n)(4-n)r^3(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n+2}{2}} \\
&= r(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n}{2}}\left[(2-n)(4-n)+2(2-n)(4-n)\right. \\
&\quad \left. -n(2-n)(4-n)r^2(\varepsilon^2+r^2)^{-1}\right] \\
&\leq r(\varepsilon^2+r^2)^{-\frac{n}{2}}\left[(2-n)(4-n)(3-n)\right] \\
&\leq \frac{r(2-n)(3-n)(4-n)}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$|f'| \leq \frac{a_n r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$|f''| \leq \frac{a_n}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+2}{2}}}$$

e

$$|f'''| \leq \frac{a_n r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n}{2}}},$$

onde a_n é uma constante positiva que depende somente da dimensão. Daí de (1.17), obtemos que

$$\Delta_0^2 f = n(n-4)(n^2-4)\frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+4}{2}}}. \tag{4.8}$$

Portanto de (4.7), obtemos que

$$\Delta_{\tilde{g}}^2 f = b_n\frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} + \frac{O(r^{N-2})}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

onde $b_n = n(n-4)(n^2-4)$. De (1.9), temos que

$$P_{\tilde{g}} f = \Delta_{\tilde{g}}^2 f + c_1\tilde{g}(\nabla^2 f, Ric_{\tilde{g}}) + c_2 R_{\tilde{g}}\Delta_{\tilde{g}} f + c_3\langle\nabla_{\tilde{g}} R_{\tilde{g}}, \nabla_{\tilde{g}} f\rangle + c_4 Q_{\tilde{g}} f, \tag{4.9}$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes que só dependem de n. Em coordenadas normais conformes,

$$Ric_{\tilde{g}}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = O(r^2), \quad R_{\tilde{g}} = O(r^2), \quad |\nabla_{\tilde{g}} R_{\tilde{g}}| = O(r), \quad |Q_{\tilde{g}}| = O(1). \tag{4.10}$$

Portanto, os quatro últimos termos de (4.9) são da ordem

$$rf' + r^2 f'',$$

que por sua vez são limitados por

$$\frac{O(r^2)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

Concluímos que

$$P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) = \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} + \frac{O(r^{N-2})}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

Para N suficientemente grande, o segundo termo do lado direito da igualdade acima pode ser absorvido pelo terceiro, e assim obtemos a estimativa desejada. $\square$

Da Proposição 2.4, segue que P_{g_0} é invertível, daí de (1.11) concluímos que $P_{\tilde{g}}$ é invertível. Logo existe uma função $\hat{u}_\varepsilon$ tal que

$$P_{\tilde{g}} \hat{u}_\varepsilon = \eta(x) \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+4}{2}}}, \tag{4.11}$$

onde $b_n = n(n-4)(n^2-4)$.

Lema 4.3. *Se $v_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon$, então existe $C > 0$ tal que em $B_{2\delta}(x_0)$ temos as estimativas*

$$|v_\varepsilon| \leq C(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{8-n}{2}} \qquad \textit{se } n > 8;$$

$$|v_\varepsilon| \leq C \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right) \qquad \textit{se } n = 8.$$

sobre $M \backslash B_{2\delta}(x_0)$ temos simplesmente

$$|v_\varepsilon| \leq C.$$

Demonstração. De (4.11) e do Lema 4.2 temos que

$$P_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon) = \eta(x) \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} - P_{\tilde{g}} u_\varepsilon = \frac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2}}}. \tag{4.12}$$

Como η tem suporte em $B_{2\delta}(x_0)$ segue que $P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)$ também tem suporte em $B_{2\delta}(x_0)$.

Seja G_x a função de Green para $P_{\tilde{g}}$ com polo em $x \in B_{2\delta}(x_0)$. Note que nas coordenadas normais de $\tilde{g}$, temos

$$|G_x(y)| \leq c|x-y|^{4-n}.$$

E lembre-se que

$$v(x) = \int_{M\backslash\{x\}} G_x P_{\tilde{g}} v dv_{\tilde{g}}.$$

Daí, se $v_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon$, então

$$v_\varepsilon(x) = \int_{M\backslash\{x\}} G_x P_{\tilde{g}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} = \int_{B_{2\delta}(x_0)\backslash\{x\}} G_x P_{\tilde{g}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}},$$

o que implica de (4.12) que

$$|v_\varepsilon(x)| \leq c \int_{B_{2\delta}(0)\backslash\{x\}} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} \frac{dy}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n-4}{2}}}.$$

Para $n = 8$, temos os casos em que $|x| = O(\varepsilon)$ e $|x| \geq C_0\varepsilon$, para alguma constante $C_0 > 0$ grande. Para o caso $|x| = O(\varepsilon)$ faça a mudança de variável $y = \varepsilon w$ e tome $\overline{x} = \varepsilon^{-1}x$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\delta}(0)\backslash\{x\}} \frac{1}{|x-y|^4} \frac{dy}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n-4}{2}}} &= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|x-\varepsilon w|^4} \cdot \frac{\varepsilon^8 dw}{(\varepsilon^2 + |\varepsilon w|^2)^2} \\
&= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}x - w\right)|^4} \cdot \frac{\varepsilon^8 dw}{(\varepsilon^2(1+|w|^2))^2} \\
&= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{\varepsilon^4|\bar{x}-w|^4} \cdot \frac{\varepsilon^8 dw}{\varepsilon^4(1+|w|^2)^2} \\
&= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|\bar{x}-w|^4} \cdot \frac{dw}{(1+|w|^2)^2} \\
&= \int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} \int_{\mathbb{S}^7} \frac{1}{|\bar{x}-r\theta|^4} \cdot \frac{r^7 d\theta dr}{(1+r^2)^2} \\
&\leq \int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} \int_{\mathbb{S}^7} \frac{1}{r^4|\bar{x}r^{-1}-\theta|^4} \cdot \frac{r^7 d\theta dr}{r^4} \\
&\leq c\int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} \frac{dr}{r} \leq c_\delta \log(\varepsilon^{-1}),
\end{aligned}$$

pois $r^2 \leq r^2 + 1$ e a integral

$$\int_{\mathbb{S}^7} \frac{d\theta}{|\bar{x}r^{-1}-\theta|^4}$$

converge e é limitada independente de r. Portanto, $|x| \leq C\varepsilon$ implica que $\varepsilon^2 + |x|^2 \leq \varepsilon$ para ε suficientemente pequeno, o que implica que $\log(\varepsilon^{-1}) \leq \log(\varepsilon^2 + |x|^2)^{-1}$.

Por outro lado, para $|x| \geq C_0\varepsilon$, com C_0 grande, fazendo a substituição $y = |x|w$ e tomando $\overline{x} = x|x|^{-1}$, obtemos

$$\int_{B_{2\delta}(0)\backslash\{x\}} \frac{1}{|x-y|^4} \frac{dy}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n-4}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B_{2\delta|x|^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|x - |x|w|^4} \cdot \frac{|x|^8 dw}{(\varepsilon^2 + |xw|^2)^2} \\
&= \int_{B_{2\delta|x|^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|x|^4|\overline{x} - w|^4} \cdot \frac{|x|^8 dw}{|x|^4\left(\frac{\varepsilon^2}{|x|^2} + |w|^2\right)^2} \\
&= \int_{B_{2\delta|x|^{-1}}(0)\backslash\{\overline{x}\}} \frac{1}{|\overline{x} - w|^4} \cdot \frac{dw}{\left(\frac{\varepsilon^2}{|x|^2} + |w|^2\right)^2} \\
&= \int_0^{2\delta|x|^{-1}} \int_{\mathbb{S}^7} \frac{1}{|\bar{x} - r\theta|^4} \cdot \frac{r^7 d\theta dr}{(\varepsilon^2|x|^{-2} + r^2)^2} \\
&\leq \int_0^{2\delta|x|^{-1}} \int_{\mathbb{S}^7} \frac{1}{r^4|\bar{x}r^{-1} - \theta|^4} \cdot \frac{r^7 d\theta dr}{r^4} \\
&\leq c\int_0^{2\delta|x|^{-1}} \frac{dr}{r} \leq c_\delta \log(|x|^{-1}).
\end{aligned}$$

Note que $|x| \geq C_0\varepsilon$ implica que $\varepsilon^2|x|^{-1} \leq C_0^{-2}$, considerando que δ é muito pequeno. Assim se C_0 é muito grande, teremos que $\varepsilon^2|x|^{-1} + |x| \leq 1$, o que implica que $\varepsilon^2 + |x|^2 \leq |x|$. Concluímos que para $n = 8$

$$|v_\varepsilon(x)| \leq c \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right),$$

para todo $x \in B_{2\delta}(x_0)$. Agora vamos ao caso $n \geq 9$. Do mesmo modo vamos separar em $|x| = O(\varepsilon)$ e $|x| \geq C_0\varepsilon$, para alguma constante C_0 grande. De modo análogo ao caso $n = 8$ se $|x| = O(\varepsilon)$, obtemos

$$\int_{B_{2\delta}(0)\backslash\{x\}} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} \frac{dy}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n-4}{2}}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\setminus\{\bar{x}\}} \frac{1}{|\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}x - w\right)|^{n-4}} \cdot \frac{\varepsilon^n dw}{(\varepsilon^2(1+|w|^2))^{\frac{n-4}{2}}} \\
&= \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\setminus\{\bar{x}\}} \frac{1}{\varepsilon^{n-4}|\bar{x} - w|^{n-4}} \cdot \frac{\varepsilon^n dw}{\varepsilon^{n-4}(1+|w|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&= \varepsilon^{8-n} \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\setminus\{\bar{x}\}} \frac{1}{|\bar{x} - w|^{n-4}} \cdot \frac{dw}{(1+|w|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&= \varepsilon^{8-n} \int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|\bar{x} - r\theta|^{n-4}} \cdot \frac{r^{n-1} d\theta dr}{(1+r^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&\leq \varepsilon^{8-n} \int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{r^{n-4}|\bar{x}r^{-1} - \theta|^{n-4}} \cdot \frac{r^{n-1} d\theta dr}{r^{n-4}} \\
&\leq c\varepsilon^{8-n} \int_0^{2\delta\varepsilon^{-1}} r^{7-n} dr \leq c_\delta.
\end{aligned}
$$

Note que, neste caso $(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{8-n}{2}} \geq c$.

De modo análogo para o caso $|x| \geq C_0\varepsilon$, obtemos que

$$
\int_{B_{2\delta}(0)\setminus\{x\}} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} \frac{dy}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n-4}{2}}} =
$$

$$
= |x|^{8-n} \int_{B_{2\delta\varepsilon^{-1}}(0)\setminus\{\bar{x}\}} \frac{1}{\left|\frac{x}{|x|} - w\right|^4} \cdot \frac{dw}{\left(\frac{\varepsilon^2}{|x|^2} + |w|^2\right)^2} \leq C|x|^{8-n}.
$$

Logo, concluímos que para $n > 8$ obtemos

$$
|v_\varepsilon(x)| \leq C(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{8-n}{2}},
$$

para todo $x \in B_{2\delta}(x_0)$. Como queríamos. $\square$

Lema 4.4. *(i)* $\displaystyle\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} \simeq \varepsilon^{-n}$,

(ii) $\displaystyle\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} = O(\varepsilon^{-4}|\log\varepsilon|)$, *para* $n = 8$,

(iii) $\displaystyle\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} = O(\varepsilon^{4-n})$, *para* $n \geq 9$.

Demonstração. Como supp $u_\varepsilon \subset B_{2\delta}(x_0)$ e $u_\varepsilon = (\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{4-n}{2}}$ na bola $B_\delta(x_0)$, então basta estimar as integrais sobre a bola $B_\delta(x_0)$. Como $dv_{\tilde{g}} = (1 + O(r^N))dx$ com N

suficientemente grande. Daí, faça $x = \varepsilon y$ e obtenha que

$$\int_{B_\delta(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx = \varepsilon^{-n} \int_{B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0)} (1+|y|^2)^{-n} dy = c\varepsilon^{-n} \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n} dr.$$

Como a última integral é uniformemente limitada em ε, segue o item (i). Para os outros itens iremos utilizar o Lema 4.3. Assim para $n = 8$ faça $x = \varepsilon y$, e obtenha que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\delta(0)} u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dx \right| &\leq c \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2+|x|^2}\right) dx \\
&\leq c\varepsilon^{-4} |\log \varepsilon| \int_{B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \log\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right) dy \\
&\leq c\varepsilon^{-4} |\log \varepsilon| \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} \log\left(\frac{1}{1+r^2}\right) dr
\end{aligned}$$

e para $n \geq 9$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\delta(0)} u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dx \right| &\leq c \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} dx \\
&\leq c\varepsilon^{4-n} \int_{B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2}} dy \\
&\leq c\varepsilon^{4-n} \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n-2}} dr.
\end{aligned}$$

Logo segue o resultado. □

Lema 4.5. *Tem-se que*

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \begin{cases} (1+O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \textit{para } n = 8 \\ (1+O(\varepsilon^4))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \textit{para } n \geq 9. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos denotar por $\mathcal{N}$ e $\mathcal{D}$ o numerador e o denominador do funcional $\mathcal{F}_{\tilde{g}}$ respectivamente. Note que

$$\mathcal{N}(\hat{u}_\varepsilon) = \int_M \hat{u}_\varepsilon P_{\tilde{g}} \hat{u}_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + 2\int_M v_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + \int_M v_\varepsilon P_{\tilde{g}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}}, \tag{4.13}$$

onde $\hat{v}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon$. Pelo Lema 4.2 obtemos

$$\int_M v_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} = \int_M v_\varepsilon \left(\frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} + \frac{O(1)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \right) dv_{\tilde{g}}. \tag{4.14}$$

Como v_ε tem suporte em $B_{2\delta}(x_0)$, obtemos para $n = 8$ pelo Lema 4.3 que

$$\begin{aligned}
\int_M v_\varepsilon \frac{O(1)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-4}{2}}} dv_{\tilde{g}} &\leq C \int_{B_{2\delta}(x_0)} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right) \frac{dx}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\
&= \int_0^{2\delta} \int_{\mathbb{S}^n} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + r^2}\right) \frac{r^7 d\theta dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^2} \\
&= C \int_0^{2\delta} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + r^2}\right) \frac{r^7 d\theta dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^2} \\
&\leq C \int_0^{2\delta} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2 + r^2}\right) \frac{(\varepsilon^2 + r^2)^3 r dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^2} \\
&\leq C \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon + 4\delta^2} \log\left(\frac{1}{s}\right) s ds \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

E para $n \geq 9$ novamente pelo Lema 4.3, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_M v_\varepsilon \frac{O(1)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{n-4}{2}}} dv_{\tilde{g}} &\leq C \int_{B_{2\delta}(x_0)} \frac{dx}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2} + \frac{n-8}{2}}} \\
&= C \int_{B_{2\delta}(x_0)} \frac{dx}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-6}} \\
&\leq C \int_0^{2\delta} \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-6}} \\
&= C \int_0^{2\delta} \frac{r^{n-2} r dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-6}} \\
&\leq C \int_0^{2\delta} \frac{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n}{2} - 1} r dr}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-6}} \\
&= C \int_0^{2\delta} (\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{10-n}{2}} dr \\
&\leq C \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon + 4\delta^2} s^{5 - \frac{n}{2}} ds \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Assim de (4.14), (4.15) e (4.16), segue que

$$\int_M v_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} = \int_{B_{2\delta}(x_0)} v_\varepsilon \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}} + O(1).$$

Do Lema (4.3) e de (4.12) obtemos que

$$\int_M v_\varepsilon P_{\tilde{g}} v_\varepsilon d v\tilde{g} = \int_{B_{2\delta}(x_0)} v_\varepsilon \left(\frac{O(1)}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-4}{2}}} \right) dv_{\tilde{g}} = O(1).$$

Logo de (4.13) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\hat{u}_\varepsilon) &= \int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + 2\int_{B_{2\delta}(x_0)} v_\varepsilon \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}} + O(1) \\
&= \int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + 2b_n\varepsilon^4 \int_{B_{2\delta}(x_0)} v_\varepsilon \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}} + O(1) \qquad (4.17) \\
&= \int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + 2b_n\varepsilon^4 \int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + O(1).
\end{aligned}$$

Agora vamos ao denominador $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}(\hat{u}_\varepsilon) = \left(\int_M |u_\varepsilon + v_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} \right)^{\frac{n-4}{n}}.$$

Do Lema 4.3 e da definição de u_ε no Lema 4.2, obtemos que para todo $x \in B_\delta(x_0)$

$$|v_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x)^{-1}| \leq (\varepsilon^2+|x|^2)^2 \leq c.$$

Daí, para todo $x \in B_\delta(x_0)$ segue da Série de Taylor que

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon + v_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} &= u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} \left| 1 + \tfrac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon} \right|^{\frac{2n}{n-4}} = u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} \left(1 + \frac{2n}{n-4} \tfrac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon} + O(v_\varepsilon^2 u_\varepsilon^{-2}) \right) \\
&= u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \frac{2n}{n-4} v_\varepsilon u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} + O(v_\varepsilon^2 u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}}).
\end{aligned}$$

Do fato que u_ε e v_ε são suaves em $M \backslash B_\delta(x_0)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_M |u_\varepsilon + v_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} &= \int_{B_\delta(x_0)} |u_\varepsilon + v_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} + \int_{M\backslash B_\delta(x_0)} |u_\varepsilon + v_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_{B_\delta(x_0)} \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \frac{2n}{n-4} u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon + O(u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}} v_\varepsilon^2) \right) dv_{\tilde{g}} + O(1) \\
&= \int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} + \frac{2n}{n-4} \int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} \\
&\quad + \int_{B_\delta(x_0)} O(u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}} v_\varepsilon^2) dv_{\tilde{g}} + O(1).
\end{aligned}$$

Além disso, usando o Lema 4.3, a expressão de u_ε temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta(x_0)} u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}} v_\varepsilon^2 dv_{\tilde{g}} &\leq C \int_{B_\delta(x_0)} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2+r^2}\right)^2 \frac{dx}{(\varepsilon^2+r^2)^4} \\
&\leq C \int_0^\delta \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2+r^2}\right)^2 \frac{r^7 dr}{(\varepsilon^2+r^2)^4} \\
&= C \int_0^\delta \log\left(\frac{1}{\varepsilon^2+r^2}\right)^2 \frac{(\varepsilon^2+r^2)^3 r dr}{(\varepsilon^2+r^2)^4} \\
&\leq C \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon^2+\delta^2} \log(1/s)^2 \frac{1}{s} ds \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

para $n=8$, e para $n \geq 9$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta(x_0)} u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}} v_\varepsilon^2 dv_{\tilde{g}} &\leq C \int_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{(\varepsilon^2+r^2)^{n-4}} dx \\
&\leq C \int_0^\delta \frac{r^{n-2} r dr}{(\varepsilon^2+r^2)^{n-4}} \\
&\leq C \int_0^\delta \frac{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n}{2}-1} r dr}{(\varepsilon^2+r^2)^{n-4}} \\
&\leq C \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon^2+\delta^2} s^{3-\frac{n}{2}} ds \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Assim, encontramos que

$$\mathcal{D}(\hat{u}_\varepsilon) = \left(\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} + \frac{2n}{n-4}\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + O(1)\right)^{\frac{n-4}{n}}. \tag{4.18}$$

Logo, de (4.17) e (4.18)

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \frac{\displaystyle\int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + 2b_n\varepsilon^4 \int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + O(1)}{\left(\displaystyle\int_M u^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}} + \frac{2n}{n-4}\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + O(1)\right)^{\frac{n-4}{n}}},$$

o que implica

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \frac{\mathcal{N}(u_\varepsilon)}{\mathcal{D}(u_\varepsilon)} \frac{1 + 2b_n\varepsilon^4 \dfrac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}{\int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}}} + \dfrac{O(1)}{\int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}}{\left(1 + \dfrac{2n}{n-4} \dfrac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}} + \dfrac{O(1)}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}}\right)^{\frac{n-4}{n}}}.$$

Pelo Lema 4.2 temos que

$$\begin{aligned}
\int_M u_\varepsilon P_{\tilde{g}} u_\varepsilon dv_{\tilde{g}} &= \int_{B_{2\delta}} \left(\frac{b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + r^2)^n} + \frac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_{B_{2\delta}} \frac{(b_n\varepsilon^4 + O(1))}{(\varepsilon^2 + r^2)^n} dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n\varepsilon^4 \left(1 + \frac{O(1)}{b_n\varepsilon^4}\right) \int_{B_{2\delta}} \frac{dv_{\tilde{g}}}{(\varepsilon^2 + r^2)^n} \\
&= b_n\varepsilon^4 (1 + O(\varepsilon^{-4})) \int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) \frac{1 + \dfrac{2\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}{(1 + O(\varepsilon^{-4}))\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}} + \dfrac{O(1)}{(1 + O(\varepsilon^{-4}))\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}}}{\left(1 + \dfrac{2n}{n-4} \dfrac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} v_\varepsilon dv_{\tilde{g}}}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}} + \dfrac{O(1)}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dv_{\tilde{g}}}\right)^{\frac{n-4}{n}}}. \tag{4.19}$$

Assim, do Lema 4.4 e de (4.19) para $n = 8$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) &= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) \frac{1 + \dfrac{O(\varepsilon^{-4}|\log\varepsilon|)}{(1 + O(\varepsilon^{-4}))O(\varepsilon^{-n})} + \dfrac{O(1)}{(1 + O(\varepsilon^{-4}))O(\varepsilon^{-n})}}{\left(1 + \dfrac{O(\varepsilon^{-4}|\log\varepsilon|)}{O(\varepsilon^{-n})} + \dfrac{O(1)}{O(\varepsilon^{-n})}\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) \frac{1 + O(\varepsilon^8|\log\varepsilon|)}{(1 + O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|))^{\frac{1}{2}}} \qquad (4.20) \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) \frac{1 + O(\varepsilon^8|\log\varepsilon|)}{1 + O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|)} \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)(1 + O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|)).
\end{aligned}$$

E para $n \geq 9$ temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) &= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)\frac{1+\dfrac{O(\varepsilon^{4-n})}{(1+O(\varepsilon^{-4}))O(\varepsilon^{-n})}+\dfrac{O(1)}{(1+O(\varepsilon^{-4}))O(\varepsilon^{-n})}}{\left(1+\dfrac{O(\varepsilon^{4-n})}{O(\varepsilon^{-n})}+\dfrac{O(1)}{O(\varepsilon^{-n})}\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)\frac{1+O(\varepsilon^8)}{(1+O(\varepsilon^4))^{\frac{n-4}{n}}} \qquad (4.21) \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)\frac{1+O(\varepsilon^8)}{1+O(\varepsilon^4)} \\
&= \mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon)(1+O(\varepsilon^4)).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \begin{cases} (1+O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \text{para } n=8 \\ \\ (1+O(\varepsilon^4))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \text{para } n \geq 9. \end{cases}
$$

Isto conclui a prova. □

Lema 4.6. *$\hat{u}_\varepsilon$ é positiva.*

Demonstração. Pela definição de $\hat{u}_\varepsilon$, (4.11), e a covariância conforme do operador de Paneitz (1.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
P_{g_0}(\varphi\hat{u}_\varepsilon) = P_{\varphi^{-\frac{4}{n-4}}\tilde{g}}(\varphi\hat{u}_\varepsilon) &= \varphi^{\frac{n+4}{n-4}}P_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) \\
&= \varphi(x)^{\frac{n+4}{n-4}}\eta(x)\frac{b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \qquad (4.22) \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Como g_0 satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2 e $\varphi > 0$, segue que $\hat{u}_\varepsilon > 0$. □

Agora defina

$$\psi_\varepsilon = \varphi\hat{u}_\varepsilon, \qquad (4.23)$$

e

$$h = \psi_\varepsilon^{4/(n-4)}g_0 = \hat{u}_\varepsilon^{4/(n-4)}\tilde{g}. \qquad (4.24)$$

Lema 4.7. *A $Q-$curvatura da métrica h é semipositiva e a curvatura escalar é positiva.*

Demonstração. Segue de (4.22) e do Teorema 2.2. □

Proposição 4.8. *Seja (M^n, g_0) uma variedade compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 8$ tal que* *(i)* Q_{g_0} *é semipositiva,*

(ii) $R_{g_0} \geq 0$

(iii) (M^n, g_0) *não é localmente conformemente plana.*

Se em $x_0 \in M$ *o tensor de Weyl* $W_{g_0}(x_0)$ *é não nulo, então para* $\varepsilon > 0$ *pequeno existe uma função* $\psi_\varepsilon \in C^\infty(M)$ *e uma constante* c_n *que depende somente da dimensão tal que*

$$\mathcal{F}_{g_0}(\psi_\varepsilon) \leq S_n - c_n\varepsilon^4|\log\varepsilon||W_{g_0}(x_0)|^2 \qquad \text{se } n = 8,$$

e

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\psi_\varepsilon) \leq S_n - c_n\varepsilon^4|W_{g_0}(x_0)|^2 \qquad \text{se } n \geq 9,$$

onde S_n *é a constante de Paneitz-Sobolev Euclidiana:*

$$S_n = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(R^n)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_0\varphi)^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}}.$$

Além disso, ψ_ε *é positivo e induz uma métrica conforme* $h = \psi_\varepsilon^{4/(n-4)} g_0$ *com as seguintes propriedades:*

(1) Q_h *é semipositivo,*

(2) $R_h > 0$

(3)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_h(1) \leq S_n - c_n\varepsilon^4|\log\varepsilon||W(x_0)|^2 && \text{se } n = 8, \\ &\mathcal{F}_h(1) \leq S_n - c_n\varepsilon^4|W(x_0)|^2 && \text{se } n \geq 9. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Demonstração. Considere ψ_ε definida em (4.23). Pela invariância conforme do funcional $\mathcal{F}_{g_0}$ Lema 4.2, temos que

$$\mathcal{F}_{g_0}(\psi_\varepsilon) = \mathcal{F}_{g_0}(\varphi\hat{u}_\varepsilon) = \mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon).$$

Do Lema 4.5 temos que

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon) = \begin{cases} (1 + O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \text{para } n = 8 \\ (1 + O(\varepsilon^4))\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) & \text{para } n \geq 9. \end{cases}$$

Novamente pelo Lema 4.2

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(u_\varepsilon) = \mathcal{F}_{g_0}(\varphi u_\varepsilon) = \mathcal{F}_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon).$$

Pelo Lema 4.1 temos

$$\mathcal{F}_{g_0}(\tilde{u}_\varepsilon) \leq \begin{cases} S_n - c_n\varepsilon^4|\log\varepsilon||W_{g_0}(x_0)|^2 & \text{para } n = 8 \\ S_n - c_n\varepsilon^4|W_{g_0}(x_0)|^2 & \text{para } n \geq 9. \end{cases}$$

Isto implica que

$$\mathcal{F}_{g_0}(\psi_\varepsilon) \leq \begin{cases} S_n - c_n\varepsilon^4|\log\varepsilon||W_{g_0}(x_0)|^2 & \text{para } n = 8 \\ S_n - c_n\varepsilon^4|W_{g_0}(x_0)|^2 & \text{para } n \geq 9. \end{cases}$$

Além disso, ψ_ε é positiva pelo Lema 4.6, e (1) e (2) segue do Lema 4.7. Para (3) novamente da invariância conforme do funcional temos

$$\mathcal{F}_{g_0}(\psi_\varepsilon) = \mathcal{F}_h(1).$$

□

4.2 Caso $n = 5, 6$ ou 7 ou Localmente Conformemente Plana

Se $n = 5, 6$ ou 7, considere uma função suave $\varphi \in M$ tal que a metrica $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g_0$ nos dá coordenadas normais conformes em um ponto x_0 tal que o tensor de Weyl é não nulo. Se g_0 for localmente conformemente plana, considere φ uma função suave tal que $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g_0$ é a métrica Euclidiana próximo de x_0. Além disso, neste caso supomos que (M, g_0) não é conformemente equivalente a esfera canônica.

Dado $\tilde{\delta} > 0$ muito menor que $\delta > 0$ fixo. Considere a função $\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(x) = \tilde{\chi}(x \backslash \tilde{\delta})$, onde $\tilde{\chi}$ é uma função radial igual a 1 na bola Euclidiana de raio 1 centrada na origem $B_1(0)$ e igual a 0 fora da bola $B_2(0)$. Para $\varepsilon > 0$ muito menor que $\tilde{\delta}$, defina a função

$$\breve{u}_\varepsilon(p) := \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(p)(u_\varepsilon(p) + \beta) + (1 - \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(p))\overline{G}_{x_0}(p), \tag{4.26}$$

onde u_ε é definida no Lema 4.2, $\beta = c_n^{-1}\alpha_{x_0} > 0$, α_{x_0} e c_n são as constantes que aparecem na expansão da função de Green G_{x_0} em (2.34), e $\overline{G}_{x_0} = c_n^{-1} G_{x_0}$. Pelo Teorema 2.8 segue que $\alpha_{x_0} > 0$. Note que pela positividade da função de Green, a função $\breve{u}_\varepsilon$ é positiva sobre M, já que $\breve{u}_\varepsilon = \overline{G}_{x_0}$ na bola $M \backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)$ e $\breve{u}_\varepsilon := u_\varepsilon + \beta$ na bola $B_{\tilde{\delta}}(x_0)$. Note que da Proposição 2.6, temos

$$\overline{G}_{x_0} = r^{4-n} + c_n^{-1}\alpha_{x_0} + O(r). \tag{4.27}$$

Lema 4.9. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|P_{\tilde{g}}\breve{u}_\varepsilon| \leq C\tilde{\delta}^{-3} \qquad \text{em } B_{2\tilde{\delta}}(x_0) \backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0).$$

Demonstração. Pela definição,

$$\check{u}_\varepsilon = \overline{G}_{x_0} + \chi_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0}).$$

Segue diretamente da definição de $P_{\tilde{g}}$, que em $B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$ temos

$$\begin{aligned} |P_{\tilde{g}}\check{u}_\varepsilon| &\leq c\left(|\nabla^4\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}||u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0}| + |\nabla^3\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}||\nabla(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})|\right. \\ &+ |\nabla^2\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}||\nabla^2(u_\varepsilon| + \beta - \overline{G}_{x_0})| \\ &+ \left.|\nabla\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}||\nabla^3(u_\varepsilon| + \beta - \overline{G}_{x_0})| + |P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})|\right). \end{aligned}$$

Temos também que

$$|\nabla^i\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}| \leq C\tilde{\delta}^{-i},$$

com i natural. Vamos mostrar que em $B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$

$$|u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0}| \leq C\tilde{\delta}; \quad |\nabla(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})| \leq C; \quad |\nabla^2(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})| \leq C\tilde{\delta}^{-1};$$

$$|\nabla^3(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})| \leq C\tilde{\delta}^{-2}; \quad |P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})| \leq C\tilde{\delta}^{-3}.$$

Como $\overline{G}_{x_0}$ é um múltiplo da função de Green de $P_{\tilde{g}}$, obemos do Lema 4.2 que

$$P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0}) = P_{\tilde{g}}(u_\varepsilon + \beta) = P_{\tilde{g}}u_\varepsilon + d_n\beta Q_{\tilde{g}} = \frac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2}}} = O(\tilde{\delta}^{-3}),$$

já que o segundo termo em (4.6) domina o primeiro em $B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$.

Para provar as outras desigualdades, note que de (4.27), da definição de u_ε no Lema 4.2 e do fato que em $B_{2\tilde{\delta}}$ temos que

$$u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0} = (\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{4-n}{2}} - r^{4-n} + O(1).$$

Porém como

$$(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{4-n}{2}} = r^{4-n} + O(\varepsilon^2 r^{2-n}),$$

então

$$u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0} = O(\varepsilon^2 r^{2-n}) + O(1).$$

Como ε é muito menor que $\tilde{\delta}$, obtemos o resultado. □

Corolário 4.10.

$$\begin{aligned} |P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)| &= \left|P_{\tilde{g}}\check{u}_\varepsilon - \frac{n(n-4)(n^2-4)\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+4}{2}}}\right| \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{O(1)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-4}{2}}} & \textit{para } r \leq \tilde{\delta}, \\ O(\tilde{\delta}^{-3}) & \textit{para } \tilde{\delta} \leq r \leq 2\tilde{\delta}, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.28}$$

para ε muito menor que $\tilde{\delta}$. Além disso, no caso localmente conformemente plano tem-se que

$$P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) = 0.$$

Demonstração. Note que

$$P_{\tilde{g}}\check{u}_\varepsilon = P_{\tilde{g}}(\chi_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon + \beta - \overline{G}_{x_0})).$$

Como $\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \equiv 1$ na bola $B_{\tilde{\delta}}(x_0)$ e em $M\backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)$ é identicamente nulo, então o resultado segue do Lema 4.2 e do Lema 4.9.

No caso localmente conformente plano na bola de raio $B_{\tilde{\delta}}(x_0)$ tem-se $P_{\tilde{g}} = \Delta_0^2$ e $\check{u}_\varepsilon = (\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{4-n}{2}} + \beta$, onde β é constante. Portanto o resultado segue de (4.8). □

Lema 4.11. *Tem-se a seguinte estimativa para alguma constante $C > 0$:*

$$|\hat{u}_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon| \leq o(1),$$

onde $\hat{u}_\varepsilon$ está definido em (4.11), e $o(1)$ é uma quantidade converge uniformenente a zero quando $\tilde{\delta}$ converge a zero.

Demonstração. Inicialmente note que como pela definição $\check{u}_\varepsilon = \overline{G}_{x_0}$ em $M\backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)$,

$$P_{\tilde{g}}\hat{u}_\varepsilon = \eta\frac{b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+4}{2}}},$$

com supp $\eta \subset B_{2\delta}(x_0)$ e $\eta \equiv 1$ em $B_\delta(x_0)$. com $\delta > \tilde{\delta}$, (4.11). Daí, temos que $P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)$ possui suporte em $B_{2\delta}(x_0)$. Assim

$$\begin{aligned}
(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)(x) = \\
&= \int_{M\backslash\{x\}} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} = \int_{B_{2\delta}(x_0)\backslash\{x\}} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_{B_{2\delta}(x_0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} + \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} \\
&\quad + \int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} \qquad (4.29) \\
&= -\int_{B_{2\delta}(x_0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}\hat{u}_\varepsilon dv_{\tilde{g}} + \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}} \\
&\quad + \int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}}.
\end{aligned}$$

Para a primeira integral temos

$$\left|\int_{B_{2\delta}(x_0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}\hat{u}_\varepsilon dv_{\tilde{g}}\right| \leq c\int_{B_{2\delta}(0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}}\frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |y|^2)^{\frac{n+4}{2}}}dy.$$

Se $|x| \leq c\varepsilon$, então faça $y = \varepsilon\omega$ e obtenha que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2\delta}(0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|y|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dy = \\
&= \int_{B_{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\backslash B_{\frac{2\tilde{\delta}}{\varepsilon}}} \frac{1}{|x-\varepsilon\omega|^{n-4}} \frac{\varepsilon^{4+n} d\omega}{(\varepsilon^2+\varepsilon^2|\omega|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&= \int_{B_{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\backslash B_{\frac{2\tilde{\delta}}{\varepsilon}}} \frac{1}{|\overline{x}-\omega|^{n-4}} \frac{\varepsilon^{4-n} d\omega}{(1+|\omega|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&= \int_{\frac{2\tilde{\delta}}{\varepsilon}}^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\varepsilon^{4-n}}{|\overline{x}-\theta|^{n-4}} \frac{r^3 dr d\theta}{(1+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&\leq c\varepsilon^{4-n} \int_{\frac{2\tilde{\delta}}{\varepsilon}}^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} r^{-n-1} dr = O(\varepsilon^4 \tilde{\delta}^{-n}).
\end{aligned}$$

Se $|x| \geq c\varepsilon$ para c grande, faça $y = |x|\omega$ e obtenha que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2\delta}(0)\backslash B_{2\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|y|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dy = \\
&= \int_{B_{\frac{2\delta}{|x|}}\backslash B_{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}} \frac{1}{|x-|x|\omega|^{n-4}} \frac{\varepsilon^4 |x|^n d\omega}{(\varepsilon^2+|x|^2|\omega|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&= \int_{B_{\frac{2\delta}{|x|}}\backslash B_{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}} \frac{1}{|\overline{x}-\omega|^{n-4}} \frac{\varepsilon^4 |x|^{-n} d\omega}{(\varepsilon^2|x|^{-2}+|\omega|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&= \int_{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}^{\frac{2\delta}{|x|}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\varepsilon^4 r^{3-n}}{|\overline{x}-\theta|^{n-4}} \frac{d\theta dr}{(\varepsilon^2 r^{-2}+r^2)^{\frac{n+4}{2}}} \\
&\leq c\varepsilon^{4-n} \int_{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}^{\frac{2\delta}{|x|}} r^{-1-2n} dr = O(\varepsilon^4 |x|^{2n} \tilde{\delta}^{-2n}).
\end{aligned}$$

Para a segunda integral de (4.29), obtemos de (4.28) que

$$\left| \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) dv_{\tilde{g}} \right| \leq c\tilde{\delta}^{-3} \int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} dy. \tag{4.30}$$

Daí se $|x| \leq 2\tilde{\delta}$, faça $y = \tilde{\delta}\omega$ e obtenha que

$$\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} dy \; = \; \int_{B_2(0)\backslash B_1(0)} \frac{\tilde{\delta}^4}{|\overline{x}-\omega|^{n-4}} d\omega \leq c\tilde{\delta}^4,$$

o que implica que

$$\left|\int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}}\right| \leq c\tilde{\delta}.$$

Se $|x| \geq 2\tilde{\delta}$, faça $y = |x|\omega$ e obtenha que

$$\begin{aligned}\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}}dy &= \int_{B_{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}(0)\backslash B_{\frac{\tilde{\delta}}{|x|}}(0)} \frac{|x|^4}{|\overline{x}-\omega|^{n-4}}d\omega \\ &= \int_{\frac{\tilde{\delta}}{|x|}}^{\frac{2\tilde{\delta}}{|x|}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|x|^4}{|\overline{x}-\omega|^{n-4}}d\omega = O(\tilde{\delta}^4).\end{aligned}$$

Daí de (4.30) obtemos que

$$\left|\int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}}\right| \leq \tilde{\delta}.$$

Para a terceira integral de (4.29) e de (4.28), temos que

$$\left|\int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}}\right| \leq c\int_{B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}}\frac{1}{(\varepsilon^2+|y|^2)^{\frac{n-4}{2}}}dy. \tag{4.31}$$

Se $|x| \leq c\varepsilon$ faça $y = \varepsilon\omega$ e obtenha que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}}\frac{1}{(\varepsilon^2+|y|^2)^{\frac{n-4}{2}}}dy &= \int_{B_{\frac{\tilde{\delta}}{\varepsilon}}(0)} \frac{\varepsilon^{8-n}}{|\overline{x}-w|^{n-4}}\frac{d\omega}{(1+|\omega|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\ &= \int_0^{\frac{\tilde{\delta}}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{r^3\varepsilon^{8-n}}{|\overline{x}-\theta|^{n-4}}\frac{drd\theta}{(1+r^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\ &\leq c\varepsilon^{8-n}\int_0^{\frac{\tilde{\delta}}{\varepsilon}} r^{7-n}dr = O(\tilde{\delta}^{8-n}).\end{aligned}$$

Se $|x| \geq c\varepsilon$ faça $y = |x|\omega$ e obtenha que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\tilde{\delta}}(0)} \frac{1}{|x-y|^{n-4}}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n-4}{2}}}dy &= \int_{B_{\frac{\tilde{\delta}}{|x|}}(0)} \frac{|x|^{8-n}}{|\overline{x}-w|^{n-4}}\frac{d\omega}{(\varepsilon^2|x|^{-2}+|x|^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\ &= \int_0^{\frac{\tilde{\delta}}{|x|}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{r^3|x|^{8-n}}{|\overline{x}-\theta|^{n-4}}\frac{drd\theta}{(\varepsilon^2|x|^{-2}+r^2)^{\frac{n-4}{2}}} \\ &\leq c|x|^{8-n}\int_0^{\frac{\tilde{\delta}}{|x|}} r^{7-n}dr = O(\tilde{\delta}^{8-n}).\end{aligned}$$

Daí de (4.31) obtem-se que

$$\left| \int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} G_x P_{\tilde{g}}(\check{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) dv_{\tilde{g}} \right| \leq O(\tilde{\delta}^{8-n}).$$

Para ε muito menor do que $\tilde{\delta}$ obtemos o resultado no caso em que $n = 5, 6, 7$.

Para o caso localmente conformemente plano, pelo Corolário 4.10 segue que a terceira integral de (4.29) é igual a zero, e com isso concluímos o resultado. □

Lema 4.12. *(i)* $\displaystyle\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{\tilde{g}} \simeq \varepsilon^{-4}$,

(ii) $\displaystyle\int_M O(u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}}) dv_{\tilde{g}} \simeq \varepsilon^{n-8}$*, para* $n = 5, 6, 7$.

Demonstração. Como supp $u_\varepsilon \subset B_{2\delta}(x_0)$ e $u_\varepsilon = (\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{4-n}{2}}$ na bola $B_\delta(x_0)$, então basta estimar as integrais sobre a bola $B_\delta(x_0)$. Como $dv_{\tilde{g}} = (1 + O(r^N))dx$ com N suficientemente grande. Daí, faça $x = \varepsilon y$ e obtenha que

$$\int_{B_\delta(0)} u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} dx = \varepsilon^{-4} \int_{B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0)} (1 + |y|^2)^{-\frac{n+4}{2}} dy = c\varepsilon^{-4} \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{\frac{n+4}{2}}} dr$$

e

$$\int_{B_\delta(0)} u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}} dx = \varepsilon^{n-8} \int_{B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0)} (1 + |y|^2)^{-4} dy = c\varepsilon^{n-8} \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^4} dr.$$

Como as integrais unidimensionais acima são uniformemente limitadas em ε, segue o resultado. □

Proposição 4.13. *Seja* (M^n, g_0) *uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão* $n = 5, 6,$ *ou* 7*, ou suponha que* (M^n, g_0) *é localmente conformemente plana de dimensão* $n \geq 5$*. Suponha que*

(i) Q_{g_0} *é semipositiva,*

(ii) $R_{g_0} \geq 0$.

Se (M^n, g_0) *não é conformemente equivalente a espera, então para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemen pequeno e todo* $x_0 \in M$*, existe uma função* $\psi_\varepsilon \in C^\infty(M)$ *e uma constante* $c_{x_0} > 0$ *tal que*

$$\mathcal{F}_{g_0}(\psi_\varepsilon) \leq S_n - c_{x_0} \varepsilon^{n-4}. \tag{4.32}$$

Além disso, ψ_ε *é positivo e induz uma métrica conforme* $h = \psi_\varepsilon^{\frac{4}{n-4}} g_0$ *com as seguintes propriedades*

(1) Q_h *é semipositiva,*

(2) $R_h > 0$,

(3) $\mathcal{F}_h(1) \leq S_n - c_{x_0}\varepsilon^{n-4}$.

Demonstração. A demonstração é análoga a Proposição 4.8.

Pelo Lema 4.6 $\hat{u}_\varepsilon$ é positiva. Daí, como em (4.23) e (4.24) defina

$$\varphi_\varepsilon = \varphi\hat{u}_\varepsilon$$

e

$$h = \psi_\varepsilon^{4/(n-4)}g_0 = \tilde{u}_\varepsilon^{4/(n-4)}\tilde{g}.$$

Inicialmente vamos estimar $\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\psi_\varepsilon)$. Pela definição de $\hat{u}_\varepsilon$ (4.11), temos que

$$\begin{aligned}
\int_M \hat{u}_\varepsilon P_{\tilde{g}}\hat{u}_\varepsilon dv_{\tilde{g}} &= \int_M \hat{u}_\varepsilon \frac{\eta(x)b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}}dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_M \left(\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta)+(1-\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}})\overline{G}_{x_0}+(\hat{u}_\varepsilon-\check{u}_\varepsilon)\right)\frac{\eta(x)b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}}dv_{\tilde{g}},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de $\check{u}_\varepsilon$ em (4.26). Lembre-se que

$$u_\varepsilon = \frac{\eta}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-4}{2}}},$$

com η igual a 1 na bola $B_\delta(x_0)$ e zero em $M\backslash B_{2\delta}(x_0)$. Como $\tilde{\delta}$ é muito menor que δ e supp $\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \subset B_{2\tilde{\delta}}(x_0) \subset B_\delta(x_0)$, temos que

$$\int_M \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta)\frac{\eta(x)b_n\varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}}dv_{\tilde{g}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \left(u_\varepsilon \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} + \beta \frac{b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \left(\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n}} + \beta \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \tilde{\chi}_{\tilde{\delta}} \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} (1+\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}-1) \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&\quad + b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} (\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}-1) \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} \\
&= b_n \varepsilon^4 \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)} \left(u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} + \beta u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} \right) dv_{\tilde{g}} + b_n \varepsilon^4 O(1),
\end{aligned}
$$

pois $\tilde{\chi}_\varepsilon - 1$ tem suporte em $M \backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$ e ε é muito menor que $\tilde{\delta}$. Pela mesma razão segue que

$$
\int_M (1-\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}) \overline{G}_{x_0} \frac{\eta(x) b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}} \leq c_{\tilde{\delta}} \varepsilon^4.
$$

Finalmente, pelo Lema 4.11 temos que

$$
\left| \int_M (\hat{u}_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon) \frac{\eta(x) b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}} \right| \leq o(1) \int_M \frac{\eta(x) b_n \varepsilon^4}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+4}{2}}} dv_{\tilde{g}}.
$$

Portanto, obtemos

$$
\int_M \hat{u}_\varepsilon P_{\tilde{g}} \hat{u}_\varepsilon = b_n \varepsilon^4 \left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx + \beta(1+o(1)) \int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{\tilde{g}} + O(1) \right), \tag{4.33}
$$

pois $dv_{\tilde{g}} = (1+O(r^N))dx$ com N tão grande quanto se queira.

Por outro lado temos que

$$
\hat{u}_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} = \left(\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta) + (1-\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}})\overline{G}_{x_0} + (\hat{u}_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon) \right)^{\frac{2n}{n-4}} = (\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta))^{\frac{2n}{n-4}}
$$

$$+O\left((\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta))^{\frac{n+4}{n-4}}\left((1-\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}})\overline{G}_{x_0}+(\hat{u}_\varepsilon-\check{u}_\varepsilon)\right)\right).$$

Daí

$$\begin{aligned}
\int_M (\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta))^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{\tilde{g}} &= \int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)}(u_\varepsilon+\beta)^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{\tilde{g}}+(\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}^{\frac{2n}{n-4}}-1)\int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)}(u_\varepsilon+\beta)^{\frac{2n}{n-4}}\,dv_{\tilde{g}}\\
&= \int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}(u_\varepsilon+\beta)^{\frac{2n}{n-4}}\,dx+O(1)
\end{aligned}$$

pois $\tilde{\chi}_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}-1$ tem suporte em $M\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$, ε é muito menor que $\tilde{\delta}$ e $dv_{\tilde{g}}=(1+O(|x|^N))dx$, com N tão grande quanto se queira. Pela mesma razão

$$\int_M\left((\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta))^{\frac{n+4}{n-4}}(1-\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}})\overline{G}_{x_0}\right)dv_{\tilde{g}}=O(1).$$

Dos Lemas 4.12 e 4.11, temos que

$$\int_M(\tilde{\chi}_{\tilde{\delta}}(u_\varepsilon+\beta))^{\frac{n+4}{n-4}}(\hat{u}_\varepsilon-\check{u}_\varepsilon)dv_{\tilde{g}}=O(\varepsilon^{-4}).$$

Logo

$$\int_M \hat{u}_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dv_{\tilde{g}} \;=\; \int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}(u_\varepsilon+\beta)^{\frac{2n}{n-4}}dx+O(\varepsilon^{-4}).$$

Como em $B_{\tilde{\delta}}(0)$, $\beta\le u_\varepsilon$, expandindo em Série de Taylor temos que

$$\begin{aligned}
\int_M \hat{u}_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dv_{\tilde{g}} &= \int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx+\frac{2n}{n-4}\beta\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dx\\
&\quad+\beta^2\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}O(u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}})dx+O(\varepsilon^{-4}).
\end{aligned}\tag{4.34}$$

De (4.33) e (4.34) obtemos que

$$\mathcal{F}(\hat{u}_\varepsilon)=\frac{b_n\varepsilon^4\left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)}u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx+\beta(1+o(1))\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}+O(1)\right)}{\left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(x_0)}u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx+\frac{2n}{n-4}\beta\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}+\beta^2\int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)}O(u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}})dv_{\tilde{g}}+O(\varepsilon^{-4})\right)^{\frac{n-4}{n}}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\hat{u}_\varepsilon) &= \frac{b_n\varepsilon^4\displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx\right)^{\frac{n-4}{n}}}\times \\
&\times\frac{\left(1+\beta(1+o(1))\dfrac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\dfrac{O(1)}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}\right)}{\left(1+\dfrac{2n}{n-4}\beta\dfrac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\beta^2\dfrac{\int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\dfrac{O(\varepsilon^{-4})}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}\right)^{\frac{n-4}{n}}}.
\end{aligned}
$$

Pelos Lemas 4.4 e 4.12 obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{2n}{n-4}\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\beta^2\frac{\int_{B_{\tilde{\delta}}(x_0)} u_\varepsilon^{\frac{8}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\frac{O(\varepsilon^{-4})}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}= \\
&= \frac{2n}{n-4}\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\beta^2\frac{O(\varepsilon^{n-8})}{O(\varepsilon^{-n})}+\frac{O(\varepsilon^{-4})}{O(\varepsilon^{-n})} \\
&= \frac{2n}{n-4}\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+O(\varepsilon^{n-4}) \\
&= \tfrac{2n}{n-4}\beta\frac{O(\varepsilon^{-4})}{O(\varepsilon^{-n})}+O(\varepsilon^{n-4})=O(\varepsilon^{n-4}).
\end{aligned}
$$

Além disso, expandindo em Série de Taylor, temos que

$$
(1+t)^{-\frac{n-4}{n}}=1-\frac{n-4}{n}t+O(t^2),
$$

para todo t próximo de zero. Portanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\hat{u}_\varepsilon) &= \frac{b_n\varepsilon^4 \displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}} \times \\
&\quad \times \left(1 + \beta(1+o(1))\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx} + \frac{O(1)}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx}\right) \times \\
&\quad \times \left(1 - 2\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}} dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx} + O(\varepsilon^{n-4})\right).
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Como em $B_{2\tilde{\delta}}(0)$ temos que $u_\varepsilon = (\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{4-n}{2}}$, o que implica de (4.3) e (4.5) que

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n\varepsilon^4 \displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}} &= \frac{b_n\varepsilon^4 \displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} (\varepsilon^2 + r^2)^{-n} dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} (\varepsilon^2 + r^2)^{-n} dx\right)^{\frac{n-4}{n}}} \\
&= b_n\varepsilon^4 \left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} (\varepsilon^2 + r^2)^{-n} dx\right)^{\frac{4}{n}} \\
&= b_n \left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2}\right)^n dx\right)^{\frac{4}{n}} \\
&= b_n \left(\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} f_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}} dx\right)^{\frac{4}{n}} \\
&\leq S_n.
\end{aligned}
$$

Logo de (4.35) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\hat{u}_\varepsilon) \;&\leq\; S_n\left(1+\beta(1+o(1))\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+\frac{O(1)}{O(\varepsilon^{-n})}\right)\times\\
&\quad\times\left(1-2\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+O(\varepsilon^{n-4})\right)\\
&=\; S_n\left(1-2\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+O(\varepsilon^{n-4})+\beta(1+o(1))\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}\right.\\
&\quad\left.+\frac{O(\varepsilon^{-4})}{O(\varepsilon^{-n})}\cdot\frac{O(\varepsilon^{-4})}{O(\varepsilon^{-n})}+\frac{O(\varepsilon^{-4})}{O(\varepsilon^{-n})}O(\varepsilon^{n-4})+O(\varepsilon^{n})\right)\\
&=\; S_n\left(1-\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+o(1)\right),
\end{aligned}$$

onde $o(1)$ é uma quantidade que converge uniformemente a zero quando ε vai a zero. Logo

$$\mathcal{F}_{\tilde{g}}(\hat{u}_\varepsilon)\leq S_n\left(1-\beta\frac{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n+4}{n-4}}dv_{\tilde{g}}}{\int_{B_{2\tilde{\delta}}(0)} u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-4}}dx}+o(1)\right).$$

O que completa a prova de (4.32). A prova de $(1),(2)$ e (3) segue analogamente a prova da Proposição 4.8. $\square$

Capítulo 5

Teorema Principal

O objetivo desse capítulo é provar o Teorema Principal. Para isso vamos precisar da seguinte proposição que pode ser encontrada em [4].

Proposição 5.1. *Seja (M, g_0) uma variedade Riemannina compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$. Seja $\delta > 0$ fixo. Então para toda função $u \in C^\infty(M)$, tem-se que*

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-4}} dv_{g_0}\right)^{\frac{n-4}{n}} \leq (S_n^{-1} + 2\delta) \int_M uP_{g_0} u dv_{g_0} + c \int_M u^2 dv_{g_0},$$

onde c é uma constante positiva que não depende de u e S_n é a constante de Sobolev do espaço Euclidoano dado por (4.1).

Teorema 5.2. *Seja (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 5$ que não é conformemente equivalente a esfera canônica. Suponha que*

(i) Q_{g_0}, é semipositiva,

(ii) $R_{g_0} \geq 0$.

Seja h a métrica construída na Proposição 4.13 (quando $5 \leq n \leq 7$, ou g_0 é localmente conformemente plana) ou Proposição 4.8 (quando $n \geq 8$ e g_0 não é localmente conformemente plana). Então existe uma solução $u(t)$ definida para todo tempo $t \geq 0$ para o fluxo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= -u + \mu P_h^{-1}(|u|^{\frac{n+4}{n-4}}) \\ u(\cdot, 0) &= 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

tal que

$$\int_M u^2 dv_h \geq C_0 \tag{5.2}$$

para alguma constante $C_0 > 0$ que não depende de t. Além disso, existe uma sequência crescente não limitada $(t_j)_j$ com $t_j \geq 0$ tal que $u_j = u_j(t_j, \cdot)$ converge fracamente em $W^{2,2}(M)$ para uma solução suave $u > 0$ de

$$P_h u = \mu_\infty u^{\frac{n+4}{n-4}}, \tag{5.3}$$

onde $\mu_\infty > 0$. Em particular, $g_\infty = u^{\frac{4}{n-4}} h$ define uma métrica conforme a g_0 que possui curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura constante positiva.

Demonstração. Pelas Proposições 4.13 e 4.8 temos que Q_h é semipositiva e $R_h > 0$. Pela Proposição 3.7 segue que o fluxo (5.1) possui uma solução suave $u(x,t)$ definida para todo tempo $t \geq 0$. Além disso, pela Proposição 3.3 temos que $u > 0$ para todo $t \geq 0$ e $Q_{h(t)} > 0$ para todo $t > 0$, onde $h(t) = u(t)^{\frac{4}{n-4}} h$. Além disso, temos também que

$$\mathcal{F}_h(1) \leq S_n - \varepsilon_0,$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Daí, como $\mathcal{F}_h(u(t))$ é não crescente, Lema 3.5, obtemos

$$\mathcal{F}_h(u(t)) = \frac{\displaystyle\int_M u(t) P_h u(t) dh}{\left(\displaystyle\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}} dh\right)^{\frac{n-4}{n}}} \leq S_n - \varepsilon_0 \tag{5.4}$$

para todo $t \geq 0$.

Pela Proposição 5.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}} dv_h\right)^{\frac{n-4}{n}} &\leq (S_n^{-1} + 2\delta) \int_M u(t) P_h u(t) dv_h + C \int_M u(t)^2 dv_h \\
&\leq (S_n^{-1} + 2\delta)(S_n - \varepsilon_0) \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}} dv_h\right)^{\frac{n-4}{n}} \\
&\quad + c \int_M u(t)^2 dv_h \\
&\leq (1 - S_n^{-1}\varepsilon_0 + \delta(2S_n - 2\varepsilon_0)) \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}} dv_h\right)^{\frac{n-4}{n}} \\
&\quad + c \int_M u(t)^2 dv_h.
\end{aligned}$$

Logo, como S_n depende somente da dimensão, tome $\delta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tais que,

$$0 < S_n^{-1}\varepsilon_0 + \delta(2S_n - 2\varepsilon_0) < 1.$$

Daí, obtemos que

$$\left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-4}} dv_h\right)^{\frac{n-4}{n}} \leq c \int_M u(t)^2 dv_h,$$

para todo $t \geq 0$, o que implica de (3.21) que

$$\int_M u(t)^2 dv_h \geq V(t)^{\frac{n-4}{n}} \geq c_0 > 0, \tag{5.5}$$

onde c_0 é uma constante positiva que não depende de t, já que $V(t)$ é não decrescente pelo Lema 3.5. Se

$$\mu(t) = \frac{\int_M u(t) P_h u(t) dv_h}{V(t)},$$

então $\mu(t)$ é descrecente pelo Lema 3.5. Considere uma sequência não limitada crescente $(t_j)_j$ com $t_j > 0$ tal que

$$\lim_{t_j \to \infty} \mu(t_j) = \mu_\infty = \inf_{t \geq 0} \mu(t).$$

Afirmação: A sequência de funções $(u_j)_j$ onde $u_j = u(t_j, \cdot)$ é limitada em $W^{2,2}(M)$.

De fato, como $\mathcal{F}_h(u(t))$ é não crescente e $V(t)$ é limitado, por (3.26), segue que

$$0 < \int_M u(t) P_h u(t) dv_h \leq \mathcal{F}_h(1) V(t)^{\frac{n-4}{n}} \leq c,$$

para alguma constante independente de t. Pela afirmação na página 31 temos que $\int_M u P_h u dv_h$ é equivalente a norma de $W^{2,2}(M)$. Logo, segue a afirmação.

Pelo Teorema de Kondrakov (Teorema 1.29), $W^{2,2}(M) \subset\subset L^2(M)$. Logo, existe uma subsequência, a qual continuaremos chamando de $(t_j)_j$, e uma função $u \in W^{2,2}$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{2,2}(M)$ e $u_j \to u$ em $L^2(M)$. Do Corolário 3.6 tem-se que

$$\int_0^\infty ||f_j||^2_{W^{2,2}(M)} dt \leq c,$$

para alguma constante positiva c independente de t, onde

$$f_j = -u_j + \mu_j P_h^{-1}(u_j^{\frac{n+4}{n-4}}).$$

Isto implica que $f_j \to 0$ em $W^{2,2}(M)$. Logo, pela definição de f_j segue que

$$u = \mu_\infty P_h^{-1}(u^{\frac{n+4}{n-4}}),$$

no sentido fraco, ou seja,

$$P_h u = \mu_\infty u^{\frac{n+4}{n-4}}, \tag{5.6}$$

no sentido fraco. Como $u \in W^{2,2}(M)$ então $u^{\frac{n+4}{n-4}} \in W^{2,2}(M)$ o que implica pelo Teorema 1.33 que $u \in W^{6,2}(M)$. Indutivamente mostramos que $u \in W^{k,2}(M)$, para todo $k \geq 0$. Logo, pelo Teorema 1.29 segue que $u \in C^{\infty}(M)$. Logo, u é solução forte de (5.6). Além disso, como $P_h u \geq 0$ segue do Princípio do Máximo, Teorema 2.2, que $u > 0$ ou $u \equiv 0$. Porém, como u_j converge fortemente para u em $L^2(M)$, então (5.5) implica que

$$\int_M u^2 dv_h > 0.$$

Logo, $u > 0$. Do Teorema 2.2 a métrica $u^{\frac{4}{n-4}}h$ possui curvatura escalar positiva e $Q-$curvatura não negativa. Porém, da invariância conforme da $Q-$curvatura (1.10), temos que

$$Q_{u^{\frac{4}{n-4}}h} = \frac{2}{n-4} u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_h u,$$

que é positivo já que $u > 0$ e P_h é positivo pela Proposição 2.3. Isto completa a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] T. Aubin *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xviii+395 pp. ISBN: 3-540-60752-8

[2] T. P. Branson, *Differential operators canonically associated to a conformal structure.* Math. Scand. 57 (1985), no. 2, 293–345.

[3] B. Chow, P. Lu, L. Ni, *Hamilton's Ricci flow.* Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press, New York, 2006. xxxvi+608 pp. ISBN: 978-0-8218-4231-7.

[4] Z. Djadli, E. Humbert, M. Ledoux, *Paneitz-type operators and applications.* Duke Math. J. 104 (2000), no. 1, 129–169.

[5] J. F. Escobar, *Topics in PDE's and differential geometry.* XII Escola de Geometria Diferencial. [XII School of Differential Geometry] Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2002. viii+88 pp. ISBN: 85-902605-4-2

[6] P. Esposito, F. Robert, *Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operators*, Calc. Var. Partial Differential Equations 15 (2002), no. 4, 493–517.

[7] M. J. Gursky, A. Malchiodi, *A strong maximum pricinple for the Paneitz operator and a non-local flow for the $Q-$curvature*, arXiv:1401.3216v5. A ser pulblicado em J. Eur. Math. Soc. (JEMS).

[8] E. Humbert, S. Raulot *Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator.* Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), no. 4, 525–531.

[9] J. M. Lee, T. H. Parker *The Yamabe problem.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 17 (1987), no. 1, 37–91.

[10] S. M. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for a arbitrary pseudo-Riemannian manifolds*, arXiv: 0803.433v1.

[11] P. Petersen, *Riemannian geometry.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, New York, 2006. xvi+401 pp. ISBN: 978-0387-29246-5

[12] F. Robert, *Fourth order equations with criticals growth in Riemannian geometry*, disponível em http://iecl.univ-lorraine.fr/∼Frederic.Robert/LectRobertFourth.pdf. Acessado em 21 de Julho de 2015.

[13] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20**(1984), no. 2, 479–495.